SUCESOS Y PROBABILIDAD

1.- Sean A y B dos sucesos correspondientes a un experimento aleatorio, tales que $A \cup B = \Omega$ con $P(A) = 0{,}8$ y $P(B) = 0{,}5$. Se pide calcular las probabilidades:

a) $P(A \cap B)$
b) $P(A \cup \overline{B})$
c) $P(\overline{A} \cup B)$
d) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$

Solución.-

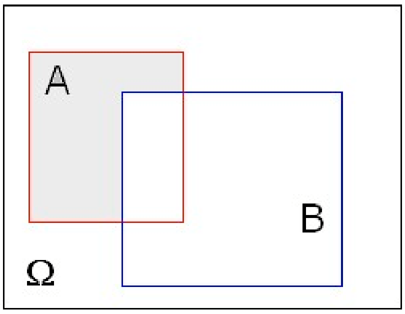
a) Sabemos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, con la hipótesis $A \cup B = \Omega$, siendo $P(\Omega) = 1$, se tiene:

$$1 = 0{,}8 + 0{,}5 - P(A \cap B) \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = 0{,}3$$

b) $\overline{B}$ es el complementario de B, en consecuencia, $\overline{B} = \Omega - B$

$$P(A \cup \overline{B}) = P(A) + P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B})$$

$$P(\overline{B}) = P(\Omega) - P(B) \quad \mapsto \quad P(\overline{B}) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$$



de otra parte,

$$\overline{B} = \Omega - B = (A \cup B) - B = A \cap \overline{B} \quad \mapsto \quad P(\overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) = 0{,}5$$

con lo que, $P(A \cup \overline{B}) = 0{,}8 + 0{,}5 - 0{,}5 = 0{,}8$

- también podríamos haber considerado: $A \cup B = \Omega \quad \Rightarrow \quad B \subset A$

  con lo cual, $P(A \cup \overline{B}) = P(A) = 0{,}8$

c) $P(\overline{A} \cup B) = P(B) = 0{,}5$

d) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) \overbrace{=}^{\text{Leyes de Morgan}} P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

2.- Sean *A*, B y *C* tres sucesos incompatibles, con $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}25$ y $P(C) = 0{,}166$. Se pide calcular las siguientes probabilidades:

a) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$
b) $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$
c) $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$
d) $P(B - A)$
e) Probabilidad de que exactamente se realice uno de los tres sucesos considerados.

<u>Solución.-</u>

a) El suceso $\overline{A} \cap \overline{B} = (\overline{A \cup B})$. Por las leyes de Morgan:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

Como los sucesos son incompatibles, $P(A \cap B) = P(\phi) = 0$. En consecuencia,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \;\mapsto\; P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

resultando:
$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - 0{,}5 - 0{,}25 = 0{,}25$

b) El suceso $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = (\overline{A \cup B \cup C})$. Por las leyes de Morgan:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C)$$

Como los sucesos son incompatibles, $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

con lo cual,

$P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A) - P(B) - P(C) = 1 - 0{,}5 - 0{,}25 - 0{,}166 = 0{,}084$

c) Siendo *A*, B y *C* sucesos incompatibles, queda:

$$A \cap B = \phi \qquad A \cap C = \phi \qquad B \cap C = \phi \qquad A \cap B \cap C = \phi$$

Si $A \cap C = \phi \;\Rightarrow\; C \subset \overline{A}$
Si $B \cap C = \phi \;\Rightarrow\; C \subset \overline{B}$

y, por tanto, $\overline{A} \cap C = C$ y $\overline{B} \cap C = C$ y $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C = C$

quedando, $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) = P(C) = 0{,}166$

d) Sabemos que el suceso $B - A = B \cap \overline{A}$. Por otro lado, $A \cap B = \phi$, con lo cual $B \subset \overline{A}$

resultando, $B - A = B \cap \overline{A} = B$

y la probabilidad pedida: $P(B - A) = P(B \cap \overline{A}) = P(B) = 0{,}25$

e) Sea E = 'suceso ocurre exactamente uno de los tres sucesos A, B , C'

$$E = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$$

por analogía con razonamientos anteriores, se tiene que:

$$A \cap \overline{B} \cap \overline{C} = A \qquad \overline{A} \cap B \cap \overline{C} = B \qquad \overline{A} \cap \overline{B} \cap C = C$$

$$P(E) = P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = 0{,}5 + 0{,}25 + 0{,}166 = 0{,}916$$

3.- Sean A y B dos sucesos independientes de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, tales que $P(A) = \alpha$ y $P(B) = \beta$. Se pide:

a) Probabilidad de que ocurra uno y solo uno de los sucesos.

b) Probabilidad de que ninguno de los sucesos se verifique. En este último caso, suponiendo que $\alpha + \beta = 1/2$, dar una cota para esta probabilidad.

Solución.-

a) Sea el suceso E = 'ocurre uno y solo uno de los sucesos'

$$E = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$

- por ser incompatibles $(A \cap \overline{B})$ y $(\overline{A} \cap B)$:

$$P(E) = P\left[(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)\right] = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$$

- como son independientes A y B $\Rightarrow$ $\begin{array}{l} A \text{ y } \overline{B} \text{ son independientes} \\ \overline{A} \text{ y } B \text{ son independientes} \end{array}$

$$P(E) = P(A).P(\overline{B}) + P(\overline{A}).P(B) = \alpha.(1-\beta) + (1-\alpha).\beta$$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}).P(\overline{B}) = (1-\alpha).(1-\beta) = 1 - (\alpha + \beta) + \alpha\beta$

cuando $\alpha + \beta = 1/2$:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - \frac{1}{2} + \alpha\beta = \frac{1}{2} + \alpha\beta = \frac{1}{2} + \alpha\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) \geq \frac{1}{2}$$

para dar una cota de la probabilidad:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2} + \alpha\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) \mapsto f'(\alpha) = \frac{1}{2} - 2\alpha = 0 \mapsto \alpha = \frac{1}{4}$$

con lo que $f(1/4) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}\right) = 0{,}5625$

La cota pedida: $0{,}5 \leq P(\overline{A} \cap \overline{B}) \leq 0{,}5625$

4.- Sean A, B dos sucesos con $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}3$ y $P(A \cap B) = 0{,}1$
Calcular la probabilidad de que ocurra exactamente uno de los dos sucesos.

<u>Solución.-</u>

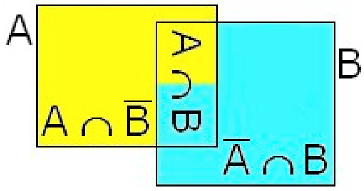
c) Sea el suceso E = 'ocurre uno y solo uno de los sucesos'

$$E = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$

♦ por ser incompatibles $(A \cap \overline{B})$ y $(\overline{A} \cap B)$:

$$P(E) = P\left[(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)\right] = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$$

♦ por otra parte, $A \cap \overline{B} = A - (A \cap B)$



y como $A \cap B \subset A$

se tiene que, $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

Análogamente, $\overline{A} \cap B = B - (A \cap B)$ y como $A \cap B \subset B$

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

con lo cual,

$$P(E) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) + P(B) - 2 . P(A \cap B) = 0{,}5 + 0.3 - 2 . 0{,}1 = 0{,}6$$

5.- Se consideran familias con dos hijos, suponiendo que las cuatro posibles combinaciones por sexo: VV, VH, HV, HH, donde V significa niño y H niña, son igualmente probables. Se piden las siguientes probabilidades:

a) Que una familia que va a ser encuestada tengo como máximo una niña.
b) Que una familia que va a ser encuestada tenga un niño y una niña.
c) ¿Son los anteriores sucesos independientes?
d) Estudiar los apartados a), b) y c), en el caso de que las familias consideradas tengan tres hijos y las ocho posibles composiciones por sexo sean equiprobables.

Solución.-

Sean los sucesos: $A = VV \qquad B = VH \qquad C = HV \qquad D = HH$

se tiene: $P(A) = P(B) = P(C) = P(D) = \dfrac{1}{4}$

a) Sea el suceso E = 'una niña como máximo': $E = A \cup B \cup C$

como son sucesos incompatibles: $P(E) = P(A) + P(B) + P(C) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$

b) Sea el suceso F = 'un niño y una niña': $F = B \cup C$

$$P(F) = P(B) + P(C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

c) El suceso $E \cap F = \left[A \cup B \cup C\right] \cap \left[B \cup C\right] = B \cup C$

$$P(E \cap F) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \qquad P(E).P(F) = \frac{3}{4}.\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$P(E \cap F) \neq P(E).P(F) \mapsto$ Los sucesos no son independientes.

d) En el caso de familias de tres hijos, las posibles combinaciones son: VVV, VVH, VHV, HVV, HHV,HVH, VHH, HHH, cada una de las cuales tiene probabilidad $1/8$ por ser equiprobables.

Sean los sucesos: $\begin{array}{llll} A = VVV & B = VVH & C = VHV & D = HVV \\ E = HHH & F = HHV & G = HVH & K = VHH \end{array}$

$$P(A) = P(B) = P(C) = P(D) = P(E) = P(F) = P(G) = P(K) = \frac{1}{8}$$

- Sea el suceso E = 'una niña como máximo': $E = A \cup B \cup C \cup D$

$$P(E) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

- Sea el suceso F = 'un niño y una niña': $F = B \cup C \cup D \cup F \cup G \cup K$

$$P(F) = P(B) + P(C) + P(D) + P(F) + P(G) + P(K) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$$

- $E \cap F = \left[A \cup B \cup C \cup D \right] \cap \left[B \cup C \cup D \cup F \cup G \cup K \right] = B \cup C \cup D$

$$P(E \cap F) = P(B \cup C \cup D) = P(B) + P(C) + P(C) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P(E).P(F) = \frac{1}{2}.\frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

$P(E \cap F) = P(E).P(F) \mapsto$ Los sucesos son independientes.

6.- Un banco ha estimado, por experiencias anteriores, que la probabilidad de que una persona falle en los pagos de un préstamo personal es de 0,3. También ha estimado que el 40% de los préstamos no pagados a tiempo se han hecho para financiar viajes de vacaciones y el 60% de los préstamos pagados a tiempo se han hecho para financiar viajes de vacaciones.
Se pide:

a) Probabilidad de que un préstamo que se haga para financiar un viaje de vacaciones no se pague a tiempo.
b) Probabilidad de que si el préstamo se hace para propósitos distintos a viajes de vacaciones sea pagado a tiempo.

Solución.-

Sean los sucesos:

A = 'una persona falla en los pagos de su préstamo personal'
B = 'una persona recibe un préstamo para financiar viajes de vacaciones'

$P(A) = 0,3 \qquad P(B / A) = 0,4 \qquad P(B / \overline{A}) = 0,6$

de donde:

$P(\overline{A}) = 0,7$

$P(\overline{B} / \overline{A}) = 1 - P(B / \overline{A}) = 1 - 0,6 = 0,4$

$P(\overline{B} / A) = 1 - P(B / A) = 1 - 0,4 = 0,6$

a) Por el teorema de Bayes:

$$P(A / B) = \frac{P(A) . P(B / A)}{P(A) . P(B / A) + P(\overline{A}) . P(B / \overline{A})} = \frac{0,3 . 0,4}{0,3 . 0,4 + 0,7 . 0,6} = 0,22$$

b) $$P(\overline{A} / \overline{B}) = \frac{P(\overline{A}) . P(\overline{B} / \overline{A})}{P(\overline{A}) . P(\overline{B} / \overline{A}) + P(A) . P(\overline{B} / A)} = \frac{0,7 . 0,4}{0,7 . 0,4 + 0,3 . 0,6} = 0,608$$

7.- Un psicólogo industrial, por experiencias anteriores, conoce que el 90 por 100 de las personas que inician un determinado tratamiento técnico terminan con éxito. La proporción de personas en entrenamiento y con experiencia previa es del 10 por 100 de entre las personas que completaron con éxito su entrenamiento y del 25 por 100 de entre aquellos que no terminaron con éxito su entrenamiento. Se pide:

a) Probabilidad de que una persona con experiencia anterior supere el entrenamiento con éxito.
b) ¿Podemos concluir que la experiencia previa influye en el éxito del entrenamiento?

<u>Solución.-</u>

Sean los sucesos: A = 'Una persona supera con éxito el entrenamiento'
B = 'Una persona tiene experiencia previa'

Según las hipótesis, se tiene:

$$P(A) = 0{,}9 \qquad P(\overline{A}) = 0{,}1 \qquad P(B/A) = 0{,}1 \qquad P(B/\overline{A}) = 0{,}25$$

a) Se pide $P(A/B)$, que según el teorema de Bayes, será:

$$P(A/B) = \frac{P(A).P(B/A)}{P(B)} = \frac{P(A).P(B/A)}{P(A).P(B/A) + P(\overline{A}).P(B/\overline{A})}$$

con lo cual, $P(A/B) = \dfrac{0{,}9\,.\,0{,}1}{0{,}9\,.\,0{,}1 + 0{,}1\,.\,0{,}25} = 0{,}78$

b) Comparando $P(A) = 0{,}9$ y $P(A/B) = 0{,}78$ se observa una diferencia entre los dos sucesos, a favor de $P(A)$: En consecuencia, en este entrenamiento la experiencia previa influye desfavorablemente en el éxito del mismo.

8.- Se considera una población en la que el 40 por 100 de las familias tienen automóvil, el 20 por 100 tienen ingresos superiores a 6000 euros, el 50 por ciento tienen ingresos entre 2500 y 6000 euros.
De los que tienen automóvil el 50 por ciento tienen ingresos superiores a 2500 euros, y de los que no tienen automóvil el 60 por 100 tienen ingresos entre 2500 y 6000 euros.
Se realiza una encuesta al azar en dicha población. Se pide:

a) Probabilidad de que se seleccione una familia que tenga automóvil o sus ingresos sean superiores a 6000 euros.
b) Probabilidad de que se seleccione una familia con automóvil y con ingresos entre 2500 y 6000 euros.
c) ¿Qué tanto por ciento de familias que no tienen automóvil tienen ingresos superiores a 6000 euros?
d) ¿Son, la posesión del automóvil y los ingresos de la familia independientes en esta población?

Solución.-

Sean los sucesos:

A = 'La familia seleccionada posee automóvil'
I_1 = 'La familia seleccionada tiene ingresos inferiores a 2500 euros'
I_2 = 'La familia seleccionada tiene ingresos entre 2500 euros y 6000 euros'
I_3 = 'La familia seleccionada tiene ingresos superiores a 6000 euros'

Según las hipótesis de la población, se tiene:

$$P(A) = 0{,}4 \qquad P(\overline{A}) = 0{,}6 \qquad P(I_2) = 0{,}5 \qquad P(I_3) = 0{,}2$$

$$P(I_1) = 1 - P(I_2) - P(I_3) = 1 - 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}3 \qquad P(I_1 / A) = 0{,}5 \qquad P(I_2 / \overline{A}) = 0{,}6$$

En otras palabras, con esta notación se solicita:

a) $P(A \cup I_3)$ b) $P(A \cap I_2)$ c) $P(I_3 / \overline{A})$

NOTA.- En el ejercicio, para calcular algunas de las probabilidades en función de las conocidas, se tendrá como base consideraciones de la probabilidad condicionada:

- $P(B / A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow P(B \cap A) = P(A).P(B / A)$

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B).P(A / B)$$

en consecuencia, $\begin{cases} P(B/A) = \dfrac{P(B).P(A/B)}{P(A)} \\ P(A/B) = \dfrac{P(A).P(B/A)}{P(B)} \end{cases}$

♦ Siendo, $P(\overline{A}/B) + P(A/B) = 1 \mapsto P(A/B) = 1 - P(\overline{A}/B) = 1 - \dfrac{P(\overline{A}).P(B/\overline{A})}{P(B)}$

$$P(B/A) = \frac{P(B).P(A/B)}{P(A)} = \frac{P(B).\left[1 - P(\overline{A}/B)\right]}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)}.\left[1 - \frac{P(\overline{A}).P(B/\overline{A})}{P(B)}\right]$$

análogamente, $P(B/\overline{A}) = \dfrac{P(B).P(\overline{A}/B)}{P(\overline{A})} = \dfrac{P(B).\left[1 - P(A/B)\right]}{P(\overline{A})} = \dfrac{P(B)}{P(\overline{A})}.\left[1 - \dfrac{P(A).P(B/A)}{P(B)}\right]$

a) $P(A \cup I_3) = P(A) + P(I_3) - P(A \cap I_3)$

$P(A \cap I_3) = P(I_3/A).P(A)$ *probabilidad condicionada*

$P(I_1/A) + P(I_2/A) + P(I_3/A) = 1$ *sistema completo de sucesos*

$P(I_3/A) = 1 - P(I_1/A) - P(I_2/A)$

Ahora tenemos que poner $P(I_2/A)$ en función de las probabilidades conocidas.

Para ello, $P(I_2/A) = \dfrac{P(I_2 \cap A)}{P(A)}$

sabemos que $P(A/I_2) = \dfrac{P(A \cap I_2)}{P(I_2)} \mapsto P(A \cap I_2) = P(I_2).P(A/I_2)$

con lo cual,

$$P(I_2/A) = \frac{P(I_2).P(A/I_2)}{P(A)} = \frac{P(I_2).\left[1 - P(\overline{A}/I_2)\right]}{P(A)} = \frac{P(I_2)}{P(A)}.\left[1 - \frac{P(\overline{A}).P(I_2/\overline{A})}{P(I_2)}\right]$$

entonces, $P(I_2/A) = \dfrac{0{,}5}{0{,}4}.\left[1 - \dfrac{0{,}6\,.\,0{,}6}{0{,}5}\right] = 0{,}35$ $\quad P(I_2/A) = \underline{0{,}35}$

luego,

$$P(I_3/A) = 1 - P(I_1/A) - P(I_2/A) = 1 - 0{,}5 - 0{,}35 = \underline{0{,}15}$$

$$P(A \cap I_3) = P(I_3 / A).P(A) = 0{,}15.0{,}4 = 0{,}06$$
$$P(A \cup I_3) = P(A) + P(I_3) - P(A \cap I_3) = 0{,}4 + 0{,}2 - 0{,}06 = 0{,}54$$

b) Para hallar $P(A \cap I_2)$, tenemos en cuenta:

$$P(A / I_2) = \frac{P(A \cap I_2)}{P(I_2)} \mapsto P(A \cap I_2) = P(I_2).P(A / I_2)$$

en donde, $P(A / I_2) = 1 - P(\overline{A} / I_2) = 1 - \dfrac{P(\overline{A}).P(I_2 / \overline{A})}{P(I_2)} = 1 - \dfrac{0{,}6.0{,}6}{0{,}5} = 0{,}28$

con lo cual, $P(A \cap I_2) = 0{,}5\ 0{,}28 = 0{,}14$

c) Análogamente, para calcular $P(I_3 / \overline{A})$

$$P(I_3 / \overline{A}) = \frac{P(I_3 \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(I_3).P(\overline{A} / I_3)}{P(\overline{A})} = \frac{P(I_3)}{P(\overline{A})}.\left[1 - P(A / I_3)\right] =$$

$$= \frac{P(I_3)}{P(\overline{A})}.\left[1 - \frac{P(A).P(I_3 / A)}{P(I_3)}\right] = \frac{0{,}2}{0{,}6}.\left[1 - \frac{0{,}4.0{,}15}{0{,}2}\right] = 0{,}313$$

d) Para comprobar que la posesión del automóvil y los ingresos de la familia son independientes, basta con observar el suceso *A* y cualquiera de los sucesos I_2 o I_3

$$P(A \cap I_3) = 0{,}06 \neq 0{,}4.0{,}2 = P(A).P(I_3)$$
$$P(A \cap I_2) = 0{,}14 \neq 0{,}4.0{,}5 = P(A).P(I_2)$$

Otra forma de verificarlo, sería, por ejemplo: $P(I_2 / A) = 0{,}35 \neq 0{,}5 = P(I_2)$

En definitiva, los sucesos no son independientes, que la familia posea o no automóvil
proporciona información sobre sus ingresos.

VARIABLES ALEATORIAS

9.- En un grupo de estudiantes de Economía se ha realizado un pequeño análisis de la relación existente entre el número de días semanales dedicados al estudio (X) y el número de convocatorias que se necesitaron para aprobar la asignatura (Y). Los resultados aparecen recogidos en la siguiente tabla de contingencia:

X \ Y	1	2	3
1	5	8	10
2	10	6	4
3	20	2	1

A partir de esta información:

a) Obtener las distribuciones marginales de X e Y.
b) Obtener la distribución de X condicionada a que Y tome el valor 3.
c) Obtener la distribución de Y condicionada a que X sea mayor o igual que 2.
d) Analizar si X e Y son independientes.

<u>Solución:</u>

a) La variable aleatoria discreta (X, Y) tiene distribución de probabilidad:

N = 66   nº total de datos

X \ Y	1	2	3	p_{x_i}
1	$5/66 = 0{,}08$	$8/66 = 0{,}12$	$10/66 = 0{,}15$	0,35
2	$10/66 = 0{,}15$	$6/66 = 0{,}09$	$4/66 = 0{,}06$	0,30
3	$20/66 = 0{,}30$	$2/66 = 0{,}03$	$1/66 = 0{,}02$	0,35
p_{y_j}	0,53	0,24	0,23	1

Las distribuciones marginales de las variables aleatorias X e Y son:

$X = x_i$	$p_{x_i} = P(X = x_i)$
1	0,35
2	0,30
3	0,35

$$p_{x_i} = \sum_{j=1}^{3} p_{ij}$$

$Y = y_j$	$p_{y_j} = P(Y = y_j)$
1	0,53
2	0,24
3	0,23

$$p_{y_j} = \sum_{i=1}^{3} p_{ij}$$

c) Distribución de X condicionada a que $Y = 3$:

$X = x_i$	$P(X = x_i / Y = 3)$
1	$0{,}15/0{,}23 = 0{,}65$
2	$0{,}06/0{,}23 = 0{,}26$
3	$0{,}02/0{,}23 = 0{,}08$

$$\sum_{i=1}^{3} P(X = x_i / Y = 3) = 1$$

Recordemos que,

$$P\left[X = x_i / Y = 3\right] = \frac{P\left[X = x_i \, ; \, Y = 3\right]}{P(Y = 3)} = \frac{p_{i3}}{p_{y3}}$$

c) Distribución de Y condicionada a que $X \geq 2$:

$Y = y_j$	$P(Y = y_j / X \geq 2)$
1	$(0{,}15 + 0{,}30)/(0{,}30 + 0{,}35) = 0{,}7$
2	$(0{,}09 + 0{,}03)/(0{,}30 + 0{,}35) = 0{,}18$
3	$(0{,}06 + 0{,}02)/(0{,}30 + 0{,}35) = 0{,}12$

$$\sum_{j=1}^{3} P(Y = y_j / X \geq 2) = 1$$

d) X e Y son independientes si $p_{ij} = p_{x_i} \cdot p_{y_j} \quad \forall \ (x_i, y_j)$

en este sentido, $p_{11} = 0{,}08 \quad p_{x_1} = 0{,}35 \quad p_{y_1} = 0{,}53$

$$p_{x_1} \cdot p_{y_1} = (0{,}35)\,.\,(0{,}53) \neq p_{11} = 0{,}08$$

En consecuencia, no son independientes.

10.- Se lanzan tres monedas al aire. Sea la variable aleatoria X = "número de caras que se obtienen". Se pide:

a) Distribución de probabilidad de X
b) Función de distribución de X y su representación gráfica.
c) Media, varianza y desviación típica de X
d) Probabilidad de que salgan a lo sumo dos caras
e) Probabilidad de que salgan al menos dos caras

Solución:

a) El espacio muestral es

$$\Omega = \{(c,c,c), (c,c,e), (c,e,c), (e,c,c), (c,e,e), (e,c,e), (e,e,c), (e,e,e)\}$$

siendo X = "número de caras que se obtienen", se tiene:

$$\begin{array}{ll} X(c,c,c) = 3 & P(X=3) = 1/8 \\ X(c,c,e) = X(c,e,c) = X(e,c,c) = 2 & P(X=2) = 3/8 \\ X(c,e,e) = X(e,c,e) = X(e,e,c) = 1 & P(X=1) = 3/8 \\ X(e,e,e) = 0 & P(X=0) = 1/8 \end{array}$$

La distribución de probabilidad es, en consecuencia,

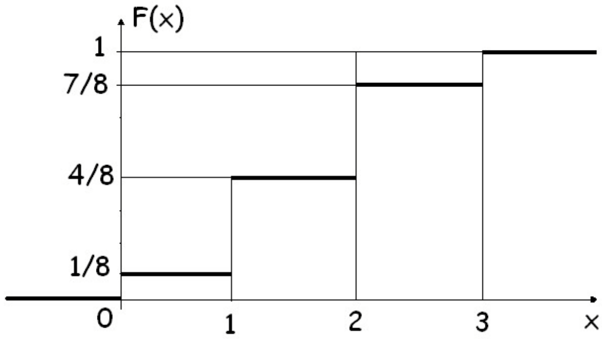
$X = x_i$	$P(X = x_i)$	$x_i.\,P(X = x_i)$	X^2	$x_i^2.\,P(X = x_i)$
$x_1 = 0$	$1/8$	0	0	0
$x_2 = 1$	$3/8$	$3/8$	1	$3/8$
$x_3 = 2$	$3/8$	$6/8$	4	$12/8$
$x_4 = 3$	$1/8$	$3/8$	9	$9/8$
	$\sum P(X = x_i) = 1$	$\sum x_i.\,P(X = x_i) = 12/8$		$\sum x_i^2.\,P(X = x_i) = 24/8$

b) La función de distribución $F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i)$ (donde x_i un valor de X)

$$\begin{array}{ll} x < 0 & F(x) = P(X \le x) = P(\phi) = 0 \\ 0 \le x < 1 & F(x) = P(X \le x) = P(X=0) = 1/8 \\ 1 \le x < 2 & F(x) = P(X \le x) = P(X=0) + P(X=1) = 4/8 \\ 2 \le x < 3 & F(x) = P(X \le x) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 7/8 \\ x \ge 3 & F(x) = P(X \le x) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 1 \end{array}$$

Gráficamente:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1/8 & 0\le x<1\\ 4/8 & 1\le x<2\\ 7/8 & 2\le x<3\\ 1 & x\ge 3\end{cases}$$



c) Media $\mu_x = E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i \,.\, P(X = x_i) = \frac{12}{8} = 1{,}5$

Varianza $\sigma_x^2 = E(X-\mu_x)^2 = E(X^2) - (\mu_x)^2 = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 .\, P(X = x_i) - (\mu_x)^2 =$

$$= \frac{24}{8} - (1{,}5)^2 = 0{,}75$$

Desviación típica $\sigma_x = \sqrt{0{,}75} = 0{,}87$

d) $P(X \le 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$

o también: $P(X \le 2) = F(2) = \frac{7}{8}$

e) $P(X \ge 2) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

o también: $P(X \ge 2) = 1 - P(X<2) = 1 - F(1) = 1 - \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

11.- Una empresa de transportes está analizando el número de veces que falla la máquina expendedora de billetes. Dicha variable tiene como función de cuantía:

$$P(X = x_i) = 0,7 \cdot 0,3^{x_i} \qquad x_i = 0, 1, 2, \cdots$$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un día la máquina no falle?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un día falle menos de 4 veces?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que falle 5 veces?

Solución:

a) $P(X = 0) = 0,7 \cdot 0,3^0 = 0,7$

b) $P(X < 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$
$= 0,7 \cdot 0,3^0 + 0,7 \cdot 0,3^1 + 0,7 \cdot 0,3^2 + 0,7 \cdot 0,3^3 = 0,7 \cdot \left(0,3^0 + 0,3^1 + 0,3^2 + 0,3^3\right) = 0,9919$

Nota.- Adviértase la conveniencia de considerar la suma de una progresión geométrica

$$S_n = \frac{a_1 - a_n \, . \, r}{1 - r} \quad \mapsto \quad S_4 = \left(0,3^0 + 0,3^1 + 0,3^2 + 0,3^3\right) = \frac{a_1 - a_4 \, . \, r}{1 - r} = \frac{1 - 0,3^3 \, . \, 0,3}{1 - 0,3} = 1,417$$

En esta línea,

$$P(X < n) = 0,7 \cdot \left(0,3^0 + 0,3^1 + 0,3^2 + 0,3^3 + \cdots + 0,3^n\right) = 0,7 \, . \, \frac{1 - 0,3^{n-1} \, . \, 0,3}{1 - 0,3} = 0,7 \, . \, \frac{1 - 0,3^n}{0,7}$$

$P(X < n) = 0,7 \cdot \left(0,3^0 + 0,3^1 + 0,3^2 + 0,3^3 + \cdots + 0,3^n\right) = 1 - 0,3^n$, en consecuencia,

$P(X < 4) = 1 - 0,3^4 = 0,9919$

c) $P(X = 5) = 0,7 \cdot 0,3^5 = 0,001701$

12.- La demanda de una empresa es de tipo aleatorio y tiene como función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} k & 0 \le x \le 10 \\ 0 & \text{restantes valores} \end{cases}$$

a) Hallar k para que f(x) sea función de densidad. Representarla
b) Hallar la función de distribución y representarla
c) Media, varianza y desviación típica
d) $P(X \le 1)$
e) $P(X = 0)$

<u>Solución</u>.-

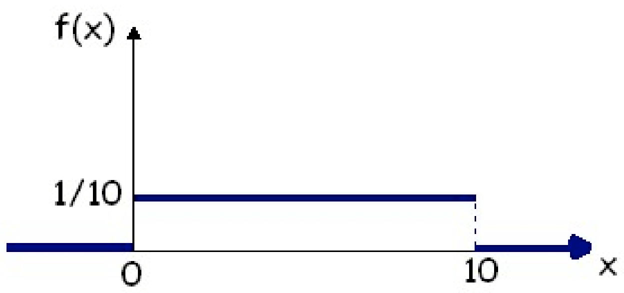
a) Para que f(x) sea función de densidad debe verificarse

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx}_{=0} + \int_{0}^{10} f(x)\,dx + \underbrace{\int_{10}^{\infty} f(x)\,dx}_{=0}$$

con lo que, $1 = \int_0^{10} f(x)\,dx = \int_0^{10} k\,dx = \left[k\,.\,x\right]_0^{10} = 10\,k \quad \Rightarrow \quad k = \dfrac{1}{10}$

La función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} 1/10 & 0 \le x \le 10 \\ 0 & \text{restantes valores} \end{cases}$$

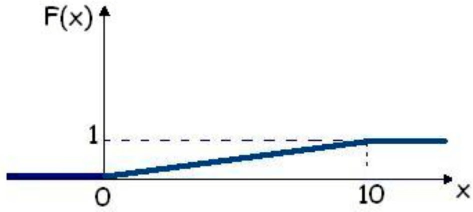


b) La función de distribución $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$$F(x) = \begin{cases} \text{si } x < 0 & \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0 \\ \text{si } 0 \le x \le 10 & \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^x \dfrac{1}{10}\,dx = \dfrac{x}{10} \\ \text{si } x > 10 & \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_0^{10} \dfrac{1}{10}\,dx + \int_{10}^{x} 0\,dx = \dfrac{10}{10} = 1 \end{cases}$$

Gráficamente:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ x/10 & \text{si } 0\le x\le 10\\ 1 & \text{si } x>10\end{cases}$$



c) Media $\mu_x = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,.\,f(x)\,dx = \int_0^{10} x\,.\,f(x)\,dx = \int_0^{10} x\,.\,\frac{1}{10}\,dx = \left[\frac{x^2}{20}\right]_0^{10} = 5$

Varianza

$$\sigma_x^2 = E(X^2) - (\mu_x)^2 = \int_0^{10} x^2\,.\,f(x)\,dx - (\mu_x)^2 = \int_0^{10} x^2\,.\,\frac{1}{10}\,dx - (5)^2 = \left[\frac{x^3}{30}\right]_0^{10} - 25 = \frac{25}{3}$$

Desviación típica $\sigma_x = \sqrt{\frac{25}{3}} = 2{,}9$

d) $P(X\le 1) = \int_{-\infty}^{1} f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{10}\,dx = \frac{1}{10}\,(x)_0^1 = \frac{1}{10}$ o también, $P(X\le 1) = F(1) = \frac{1}{10}$

e) $P(X=0) = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = \int_0^0 \frac{1}{10}\,dx = 0$ o también, $P(X=0) = F(0) = 0$

13.- En un hospital se comprobó que el peso en kilos de los niños al nacer era una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} k\,x & 2 \le x \le 4 \\ 0 & \text{restantes valores} \end{cases}$$

f) Hallar k para que f(x) sea función de densidad. Representarla
g) Hallar la función de distribución y representarla
h) Media, varianza y desviación típica
i) Probabilidad de que un niño elegido al azar pese más de 3 kilos
j) Probabilidad de que pese entre 2 y 3,5 kilos
k) ¿Qué debe pesar un niño para tener inferior o igual a su peso al 90 % de los niños?.

<u>Solución</u>.-

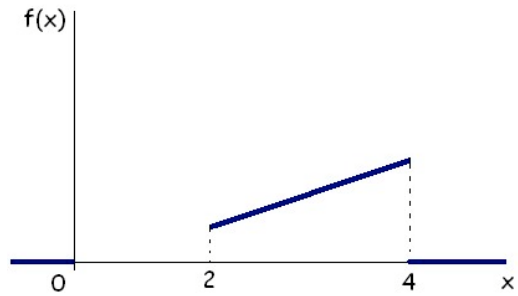
a) Para que f(x) sea función de densidad debe verificarse

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx}_{=0} + \int_{2}^{4} f(x)\,dx + \underbrace{\int_{4}^{\infty} f(x)\,dx}_{=0}$$

con lo que, $1 = \int_2^4 f(x)\,dx = \int_2^4 k\,x\,dx = k\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4 = 6\,k \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{16}$

La función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} x/6 & 2 \le x \le 4 \\ 0 & \text{restantes valores} \end{cases}$$

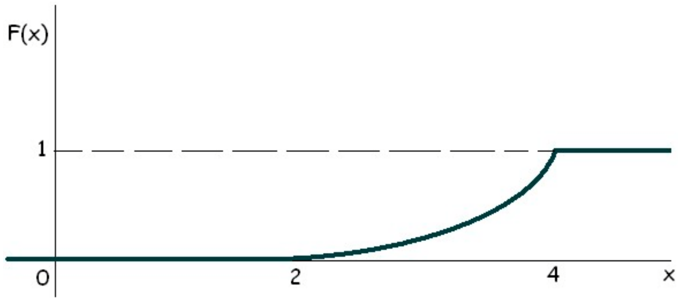


b) La función de distribución $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$$F(x) = \begin{cases} \text{si } x < 2 & \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0 \\ \text{si } 2 \le x \le 4 & \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{2} 0\,dx + \int_2^x \frac{x}{6}\,dx = \left[\frac{x^2}{12}\right]_2^x = \frac{x^2-4}{12} \\ \text{si } x > 4 & \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{2} 0\,dx + \int_2^4 \frac{x}{6}\,dx + \int_4^x 0\,dx = \left[\frac{x^2}{12}\right]_2^4 = 1 \end{cases}$$

Gráficamente:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<2 \\ \dfrac{x^2-4}{12} & \text{si } 2\le x\le 4 \\ 1 & \text{si } x>4 \end{cases}$$



c) Media $\mu_x = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,.\,f(x)\,dx = \int_2^4 x\,.\,f(x)\,dx = \int_2^4 x\,.\,\frac{x}{6}\,dx = \left[\frac{x^3}{18}\right]_2^4 = 3{,}1 \text{ kilos}$

Varianza

$$\sigma_x^2 = E(X^2) - (\mu_x)^2 = \int_2^4 x^2\,.\,f(x)\,dx - (\mu_x)^2 = \int_2^4 x^2\,.\,\frac{x}{6}\,dx - (3{,}1)^2 = \left[\frac{x^4}{24}\right]_2^4 - 9{,}61 = 0{,}39$$

Desviación típica $\sigma_x = \sqrt{0{,}39 \text{ kilos}^2} = 0{,}6 \text{ kilos}$

d) $P(X>3) = \int_3^4 f(x)\,dx = \int_3^4 \frac{x}{6}\,dx = \left[\frac{x^2}{12}\right]_3^4 = 0{,}583$

o también, $P(X>3) = 1 - P(X\le 3) = 1 - F(3) = 1 - \dfrac{3^2-4}{12} = 0{,}583$

e) $P(2\le X\le 3{,}5) = \int_2^{3,5} f(x)\,dx = \int_2^{3,5} \frac{x}{6}\,dx = \left[\frac{x^2}{12}\right]_2^{3,5} = 0{,}6875$

o también, $P(2\le X\le 3{,}5) = F(3{,}5) - F(2) = \dfrac{3{,}5^2-4}{12} - 0 = 0{,}6875$

f) $P(X\le a) = F(a) = 0{,}90 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{a^2-4}{12} = 0{,}9 \quad \mapsto \quad a^2 - 4 = 10{,}8 \quad \mapsto \quad a = \sqrt{14{,}8} = 3{,}8$

Es decir, el niño debe pesar 3,8 kilos para tener el 90% de los niños con un peso inferior o igual.

14.- Una variable aleatoria X tiene como función de distribución:

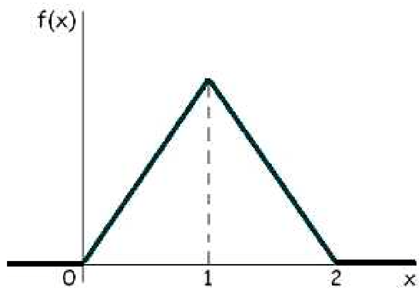
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x^2}{2} & 0 \le x \le 1 \\ 2x - \dfrac{x^2}{2} - 1 & 1 < x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

a) Hallar la función de densidad. Representarla
b) Media, varianza y desviación típica
c) $P\left(\frac{1}{2} < X \le \frac{3}{2}\right)$

Solución.-

a) La función de densidad f(x) es la derivada de la función de distribución F(x) en los puntos donde exista la derivada, por tanto

$$f(x) = \frac{d\,F(x)}{dx} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & 1 < x \le 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$



b) Media

$$\mu_x = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)\,dx = \int_0^1 x.f(x)\,dx + \int_1^2 x.f(x)\,dx = \int_0^1 x.x\,dx + \int_1^2 x.(2-x)\,dx =$$

$$= \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 (2x - x^2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{3} + 4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3} = 1$$

Varianza

$$\sigma_x^2 = E(X^2) - (\mu_x)^2 = \int_0^1 x^2.f(x)\,dx + \int_1^2 x^2.f(x)\,dx - (\mu_x)^2 =$$

$$= \int_0^1 x^2.x\,dx + \int_1^2 x^2.(2-x)\,dx - (1)^2 = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_1^2 - 1 = \frac{14}{12} - 1 = \frac{1}{6}$$

Desviación típica $\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{6}} = 0{,}41$

c) $P\left(\frac{1}{2} \le X \le \frac{3}{2}\right) = \int_{1/2}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{3/2} f(x)\,dx = \int_{1/2}^{1} x\,dx + \int_{1}^{3/2} (2-x)\,dx =$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_{1/2}^{1} + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_{1}^{3/2} = \frac{3}{4}$$

o también, $P\left(\frac{1}{2} \le X \le \frac{3}{2}\right) = F\left(\frac{3}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \left(3 - \frac{9}{8} - 1\right) - \left(\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{4}$

15.- La demanda diaria de un determinado artículo (x) es una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{8} & 0 < x \le 4 \\ \dfrac{12-x}{64} & 4 < x \le 12 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Los beneficios diarios dependen de la demanda según la siguiente función:

$$B^o = \begin{cases} -5 & \text{si} \quad x < 2 \\ 5 & \text{si} \quad 2 < x \le 4 \\ 10 & \text{si} \quad 4 < x \le 8 \\ 15 & \text{si} \quad 8 < x \le 12 \end{cases}$$

Calcular:

a) Probabilidad de que en un día cualquiera la demanda sea superior a 10
b) Probabilidad de que la demanda sea inferior a 3
c) La esperanza y la varianza de la demanda
d) Función de distribución de la demanda
e) Función de cuantía y función de distribución de la variable aleatoria beneficios diarios.
f) Esperanza y varianza de la variable beneficios

Solución.-

a) $P(X > 10) = \int_{10}^{12} f(x)\, dx = \int_{10}^{12} \frac{12-x}{64}\, dx = \frac{1}{64}\left[12x - \frac{x^2}{2}\right]_{10}^{12} = \frac{1}{32} = 0{,}03125$

b) $P(X < 3) = \int_{0}^{3} f(x)\, dx = \int_{0}^{3} \frac{1}{8}\, dx = \frac{1}{8}[x]_0^3 = \frac{3}{8} = 0{,}375$

c) Media o Esperanza

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)\, dx = \int_0^4 x.f(x)\, dx + \int_4^{12} x.f(x)\, dx = \int_0^4 x.\frac{1}{8}\, dx + \int_4^{12} x.\frac{12-x}{64}\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^4 x\, dx + \frac{1}{64}\int_4^{12}(12x - x^2)\, dx = \frac{1}{16}\left[x^2\right]_0^4 + \frac{1}{64}\left[6x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_4^{12} =$$

$$= 1 + \frac{1}{64}\left(864 - \frac{1728}{3} - 96 + \frac{64}{3}\right) = \frac{13}{3} = 4{,}33$$

Varianza

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2.f(x)\,dx=\int_0^4 x^2.f(x)\,dx\ +\int_4^{12} x^2.f(x)\,dx=\int_0^4 x^2.\frac{1}{8}\,dx+\int_4^{12} x^2.\frac{12-x}{64}\,dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^4 x^2\,dx+\frac{1}{64}\int_4^{12}(12x^2-x^3)\,dx=\frac{1}{24}\left[x^3\right]_0^4+\frac{1}{64}\left[4x^3-\frac{x^4}{4}\right]_4^{12}=$$

$$=\frac{64}{24}+\frac{1}{64}\left(6912-5184-256+64\right)=\frac{5120}{192}=\frac{80}{3}=26{,}67$$

$$\sigma_x^2=V(X)=E(X^2)-(\mu_x)^2=\frac{80}{3}-\left(\frac{13}{3}\right)^2=\frac{71}{9}=7{,}89$$

d) La función de distribución de la demanda $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$$F(x)=\begin{cases} \text{si } x<0 & \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{x} 0\,dx=0 \\ \text{si } 0\le x<4 & \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int_0^x \frac{1}{8}\,dx=\frac{x}{8} \\ \text{si } 4\le x<12 & \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=\int_0^4 \frac{1}{8}\,dx+\int_4^x \frac{12-x}{64}\,dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{64}\left(-\frac{x^2}{2}+12x-40\right) \\ \text{si } x\ge 12 & \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int_0^4 \frac{1}{8}\,dx+\int_4^{12}\frac{12-x}{64}\,dx+\int_{12}^{x} 0\,dx=1 \end{cases}$$

En resumen,

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \frac{x}{8} & \text{si } 0\le x<4 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{64}\left(-\frac{x^2}{2}+12x-40\right) & \text{si } 4\le x<12 \\ 1 & \text{si } x\ge 12 \end{cases}$$

e) Calculamos la función de cuantía y la función de distribución de la variable aleatoria beneficios diarios:

$$B^{o}=\begin{cases} -5 & \text{si } x<2 \\ 5 & \text{si } 2<x\le 4 \\ 10 & \text{si } 4<x\le 8 \\ 15 & \text{si } 8<x\le 12 \end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases} \frac{1}{8} & 0<x\le 4 \\ \frac{12-x}{64} & 4<x\le 12 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

B_i^o	$P(B^o = B_i^o)$
-5	$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{1}{8}\,dx = \frac{1}{4} = 0{,}25$
5	$\int_2^4 f(x)\,dx = \int_2^4 \frac{1}{8}\,dx = \frac{1}{4} = 0{,}25$
10	$\int_4^8 f(x)\,dx = \int_4^8 \frac{12-x}{64}\,dx = \frac{1}{64}\left(12x - \frac{x^2}{2}\right)_4^8 = 0{,}375$
15	$\int_8^{12} f(x)\,dx = \int_8^{12} \frac{12-x}{64}\,dx = \frac{1}{64}\left(12x - \frac{x^2}{2}\right)_8^{12} = 0{,}125$

La función de distribución $F(B^o) = P(B^o \le B_i^o) = \sum_{B_i^o \le B^o} P(B^o = B_i^o)$

B_i^o	$P(B^o = B_i^o)$	$F(B^o) = P(B^o \le B_i^o)$	$B_i^o \, . \, P(B^o = B_i^o)$	$(B_i^o)^2 \, . \, P(B^o = B_i^o)$
-5	0,25	0,25	$-1{,}25$	6,25
5	0,25	0,50	1,25	6,25
10	0,375	0,875	3,75	37,5
15	0,125	1	1,875	28,125
			$\sum_{i=1}^{4} B_i^o \, . \, P(B^o = B_i^o) = 5{,}625$	$\sum_{i=1}^{4} (B_i^o)^2 \, P(B^o = B_i^o) = 78{,}125$

f) Media o Esperanza beneficios $\mu_{B^o} = E(B^o) = \sum_{i=1}^{4} B_i^o \, . \, P(B^o = B_i^o) = 5{,}625$

Varianza beneficios

$$E\left[(B^o)^2\right] = \sum_{i=1}^{4} (B_i^o)^2 \, . \, P(B^o = B_i^o) = 78{,}125$$

$$\sigma^2_{B^o} = V(B^o) = E({B^o}^2) - (\mu_{B^o})^2 = 78{,}125 - (5{,}625)^2 = 46{,}48$$

Desviación típica de los beneficios $\sigma_{B^o} = \sqrt{46{,}48} = 6{,}817$

EJERCICIOS VARIOS DE SUCESOS Y PROBABILIDAD

1. Dada la función $f(x) = e^{-2x}$

a) Comprobar si puede ser función de densidad de una variable aleatoria X cuando su campo de variación es el intervalo $x \geq 0$
b) En caso de que no lo pueda ser, qué modificaciones habría que introducir para que lo fuera.

Solución:

a) Para que sea función de densidad, debe cumplir dos condiciones en el campo de variación de la variable aleatoria:

- $f(x)$ no puede ser negativa
- La integral de $f(x)$ en el campo de variación es 1

- $f(x) = e^{-2x} \geq 0 \quad \mapsto \quad L\, e^{-2x} \geq L\,0 \quad \Rightarrow \quad -2x > -\infty \quad \Rightarrow \quad x < \infty$ es positiva

- $\int_0^\infty e^{-2x}\, dx = \left[-\frac{1}{2}\, e^{-2x} \right]_0^\infty = \left[0 + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2} \neq 1$. No se cumple, luego la función dada no es de densidad en el intervalo.

b) Para que sea función de densidad, se define $f(x) = k\, e^{-2x}$

$$\int_0^\infty k\, e^{-2x}\, dx = k \int_0^\infty e^{-2x}\, dx = k \left[-\frac{1}{2}\, e^{-2x} \right]_0^\infty = \frac{k}{2} = 1 \mapsto k = 2$$

En consecuencia, $f(x) = 2\, e^{-2x}$

2. Dada la variable aleatoria continua X con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} k(x+2) & 0 \le x \le 4 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Hallar:

a) El valor de k para que sea realmente una función de densidad
b) La función de distribución
c) La varianza
d) $P(2 \le X \le 3)$

Solución:

a) $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx = 1 \quad \mapsto \quad \int_0^4 k(x+2)\,dx = k\int_0^4 (x+2)\,dx = k\left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^4 = 16k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{16}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{16}(x+2) & 0 \le x \le 4 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

b) Función de distribución: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$, en este caso:

$x < 0 \qquad F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$

$0 \le x < 4 \quad F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt + \int_0^x \frac{1}{16}(t+2)\,dt = \frac{1}{16}\int_0^x (t+2)\,dt = \frac{1}{16}\left[\frac{t^2}{2} + 2t\right]_0^x =$

$\displaystyle = \frac{x^2 + 4x}{32}$

$x \ge 4 \qquad F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt + \int_0^4 \frac{1}{16}(t+2)\,dt + \int_4^x 0\,dt = \frac{1}{16}\left[\frac{t^2}{2} + 2t\right]_0^4 = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x^2 + 4x}{32} & 0 \le x < 4 \\ 1 & x \ge 4 \end{cases}$$

c) Para calcular la varianza: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{16}(x+2) & 0\le x\le 4\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$

$$\alpha_1=\mu=E[X]=\int_0^4 x\,f(x)\,dx=\int_0^4 x\left[\frac{1}{16}(x+2)\right]dx=\frac{1}{16}\int_0^4 (x^2+2x)\,dx=\frac{1}{16}\left[\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^4=$$
$$=\frac{1}{16}\left[\frac{112}{3}\right]=\frac{7}{3}$$

$$\alpha_2=E\left[X^2\right]=\int_0^4 x^2\,f(x)\,dx=\int_0^4 x^2\left[\frac{1}{16}(x+2)\right]dx=\frac{1}{16}\int_0^4 (x^3+2x^2)\,dx=\frac{1}{16}\left[\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}\right]_0^4=$$
$$=\frac{1}{16}\left[64+\frac{128}{3}\right]=\frac{20}{3}$$

$$\sigma_X^2=\text{Var}(X)=E\left[X^2\right]-\left(E[X]\right)^2=\alpha_2-\left(\alpha_1\right)^2$$

$$\sigma_X^2=\frac{20}{3}-\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{11}{9}$$

d) $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{x^2+4x}{32} & 0\le x<4\\ 1 & x\ge 4\end{cases}$ $\qquad f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{16}(x+2) & 0\le x\le 4\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$

$$P(2\le X\le 3)=F(3)-F(2)=\left(\frac{9+12}{32}\right)-\left(\frac{4+8}{32}\right)=\frac{21-12}{32}=\frac{9}{32}$$

$$P(2\le X\le 3)=\int_2^3 \frac{1}{16}(x+2)\,dx=\frac{1}{16}\left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_2^3=\frac{1}{16}\,\frac{9}{2}=\frac{9}{32}$$

3. La función de densidad de una variable aleatoria es: $f(x)=\begin{cases} a\,x^2+b & 0<x<2 \\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$

sabiendo que $P\left[\dfrac{1}{2}<x<1\right]=0{,}1357$. Determinar a y b.

Solución:

Hay que calcular dos parámetros (a y b), por lo que se necesitan dos ecuaciones:

- Por ser función de densidad:

$$1=\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 (a\,x^2+b)\,dx=\left[a\frac{x^3}{3}+b\,x\right]_0^2=\frac{8\,a}{3}+2b \quad\mapsto\quad 8\,a+6\,b=3$$

- $P\left[\dfrac{1}{2}\le x\le 1\right]=\displaystyle\int_{1/2}^1 f(x)\,dx=\int_{1/2}^1 (a\,x^2+b)\,dx=\left[a\frac{x^3}{3}+b\,x\right]_{1/2}^1=0{,}1357$, con lo que:

$$\left[a\frac{x^3}{3}+b\,x\right]_{1/2}^1=\left[\frac{a}{3}+b\right]-\left[\frac{a}{24}+\frac{b}{2}\right]=\frac{7a}{24}+\frac{b}{2}=0{,}1357 \quad\mapsto\quad 7a+12b=3{,}2568$$

en consecuencia,

$$\left.\begin{array}{r} 8\,a+6\,b=3 \\ 7a+12\,b=3{,}2568 \end{array}\right\} \quad\mapsto\quad \left.\begin{array}{r} 16\,a+12\,b=6 \\ -7a-12\,b=-3{,}2568 \end{array}\right\} \quad a=0{,}3048 \qquad b=0{,}0936$$

4. En una clase de la Facultad de Económicas de 30 alumnos hay 18 alumnos que han aprobado estadística, 16 que han aprobado contabilidad y 6 que no han aprobado ninguna de las dos asignaturas. Se elige al azar un alumno de la clase.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado estadística y contabilidad?
b) Sabiendo que ha aprobado estadística, ¿cuál es la probabilidad de que haya aprobado contabilidad?.
c) ¿Son independientes los sucesos 'aprobar estadística' y 'aprobar contabilidad'.

Solución:

Se organizan los datos en una tabla de doble entrada, completando los que faltan:

	APRUEBAN ESTADÍSTICA	NO APRUEBAN ESTADÍSTICA	
APRUEBAN CONTABILIDAD	10	6	**16**
NO APRUEBAN CONTABILIDAD	8	**6**	14
	18	12	**30**

Sean los sucesos: E = 'Aprueban Estadística' C = "Aprueban Contabilidad"

a) $P(E \cap C) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

b) $P(C/E) = \frac{P(E \cap C)}{P(E)} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$

c) Los sucesos son independientes cuando $P(E \cap C) = P(E) \,.\, P(C)$

$$\begin{cases} P(E \cap C) = 1/3 \\ P(E) \,.\, P(C) = \frac{18}{30} \cdot \frac{16}{30} = \frac{3}{5} \cdot \frac{18}{15} = \frac{8}{25} \end{cases} \mapsto \quad \frac{1}{3} \neq \frac{8}{25}$$ Los sucesos NO son independientes

5. En una cadena de televisión se hizo una encuesta a 2500 personas para saber la audiencia de un debate y de una película que se emitieron en horas distintas: 2100 personas vieron la película, 1500 vieron el debate y 350 no vieron ninguno de los dos programas. Se elegimos al azar uno de los encuestados:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que viera la película y el debate?.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que viera la película, sabiendo que vio el debate?.
c) Sabiendo que vio la película, ¿Cuál es la probabilidad de que viera el debate?.

Solución:

Se organizan los datos en una tabla de doble entrada, completando los que faltan:

	DEBATE	NO DEBATE	
PELÍCULA	1450	650	**2100**
NO PELÍCULA	50	**350**	400
	1500	1000	**2500**

Sean los sucesos: P = 'Vio la película' D = "Vio el debate"

a) $P(P \cap D) = \dfrac{1450}{2500} = \dfrac{29}{50} = 0{,}58$

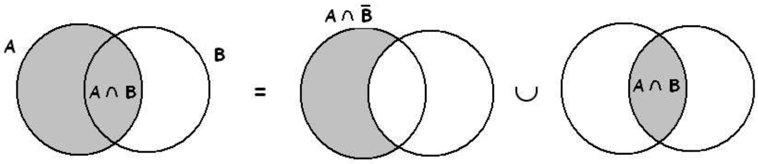
b) $P(P / D) = \dfrac{P(P \cap D)}{P(D)} = \dfrac{1450}{1500} = \dfrac{29}{30} = 0{,}97$

c) $P(D / P) = \dfrac{P(D \cap P)}{P(P)} = \dfrac{1450}{2100} = \dfrac{29}{42} = 0{,}69$

6. Sabiendo que: $P\left[A \cap B\right] = 0{,}2$; $P\left[\bar{B}\right] = 0{,}7$; $P\left[A \cap \bar{B}\right] = 0{,}5$

Se pide: $P\left[A \cup B\right]$ y $P\left[A\right]$

Solución:



$P\left[A\right] = P\left[A \cap \bar{B}\right] + P\left[A \cap B\right] = 0{,}5 + 0{,}2 = 0{,}7$

$P\left[B\right] = 1 - P\left[\bar{B}\right] = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

$$P\left[A \cup B\right] = P\left[A\right] + P\left[B\right] - P\left[A \cap B\right] = 0{,}7 + 0{,}3 - 0{,}2 = 0{,}8$$

7. Sean dos sucesos A y B, tales que $P\left[\overline{A} \cap \overline{B}\right] = 0 \quad P\left[\overline{A} \cup \overline{B}\right] = 0{,}5 \quad P\left[\overline{A}\right] = 0{,}4$

Calcula: $P\left[B\right]$ y $P\left[A \cap B\right]$

Solución:

- $P\left[\overline{A} \cap \overline{B}\right] \underset{\text{Morgan}}{=} P\left[\overline{A \cup B}\right] = 1 - P\left[A \cup B\right] = 0 \quad \mapsto \quad P\left[A \cup B\right] = 1$

- $P\left[\overline{A} \cup \overline{B}\right] \underset{\text{Morgan}}{=} P\left[\overline{A \cap B}\right] = 1 - P\left[A \cap B\right] = 0{,}5 \quad \mapsto \quad P\left[A \cap B\right] = 0{,}5$

$$P\left[\overline{A}\right] = 1 - P\left[A\right] = 0{,}4 \quad \mapsto \quad P\left[A\right] = 0{,}6$$

$$P\left[A \cup B\right] = P\left[A\right] + P\left[B\right] - P\left[A \cap B\right] \quad \mapsto \quad 1 = 0{,}6 + P\left[B\right] - 0{,}5 \quad \mapsto \quad P\left[B\right] = 0{,}9$$

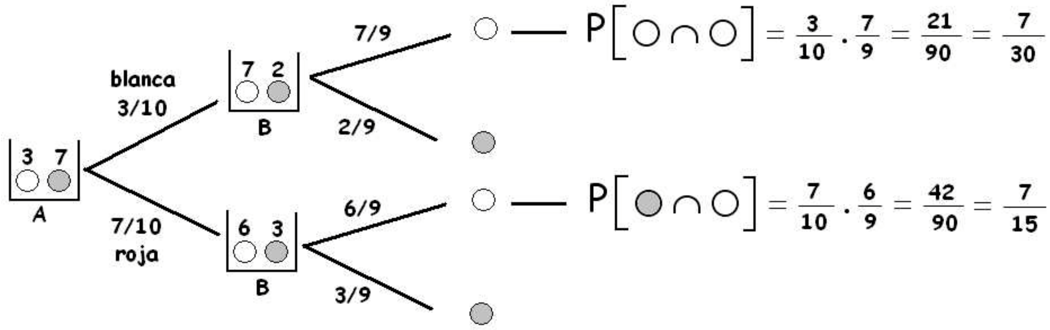
8. Tenemos dos bolsas, A y B. En la bolsa A hay 3 bolas blancas y 7 rojas. En la bolsa B hay 6 bolas blancas y 2 rojas. Sacamos una bola de A y la pasamos a B. Después se extrae una bola de B.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída de B sea blanca?.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas sean blancas?.

Solución:

Se hace un diagrama de árbol:



a) $P\left[2^{a} \text{ blanca}\right] = \dfrac{7}{30} + \dfrac{7}{15} = \dfrac{21}{30} = \dfrac{7}{10}$

b) $P\left[1^{a} \text{ blanca} \cap 2^{a} \text{ blanca}\right] = \dfrac{7}{30}$

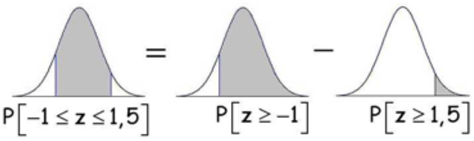
9. El tiempo empleado, en horas, en hacer un determinado producto sigue una distribución $N(10, 2)$. Se pide la probabilidad de que ese producto se tarde en hacer:

a) Menos de 7 horas
b) Entre 8 y 13 horas

Solución:

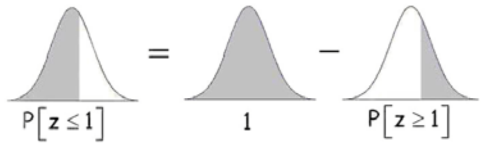
a) $P\left[x < 7\right] \underset{\text{tipificando}}{=} P\left[\dfrac{x-10}{2} < \dfrac{7-10}{2}\right] = P\left[z < -1,5\right] = P\left[z > 1,5\right] = 0,0668$

b) $P\left[8 \le x \le 13\right] \underset{\text{tipificando}}{=} P\left[\dfrac{8-10}{2} \le \dfrac{x-10}{2} \le \dfrac{13-10}{2}\right] = P\left[-1 \le z \le 1,5\right]$



$P\left[-1 \le z \le 1,5\right] = P\left[z \ge -1\right] - P\left[z \ge 1,5\right]$

$P\left[-1 \le z \le 1,5\right] = P\left[z \ge -1\right] - P\left[z \ge 1,5\right] = P\left[z \le 1\right] - P\left[z \ge 1,5\right]$



$P\left[z \le 1\right] = 1 - P\left[z \ge 1\right]$

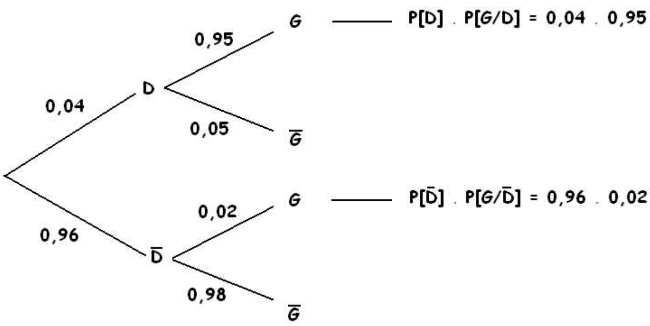
$$P\left[-1 \le z \le 1,5\right] = P\left[z \ge -1\right] - P\left[z \ge 1,5\right] = P\left[z \le 1\right] - P\left[z \ge 1,5\right] = 1 - P\left[z \ge 1\right] - P\left[z \ge 1,5\right] =$$
$$= 1 - 0,1587 - 0,0668 = 0,7745$$

10. La prevalencia de diabetes es del 4%. La glucemia basal diagnóstica correctamente el 95% de los diabéticos, pero da un 2% de falsos positivos. Diagnosticada una persona ¿Cuál es la probabilidad de que realmente sea diabética?

Solución:

Sean los sucesos: D = "tener diabetes" $\quad$ G = "dar positivo en la prueba glucemia basal"

$$P\left[D\right]=0{,}04 \qquad P\left[\bar{D}\right]=0{,}96 \qquad P\left[G/D\right]=0{,}95 \qquad P\left[G/\bar{D}\right]=0{,}02$$



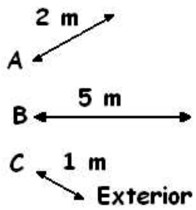
El Teorema de Bayes:

$$P\left[D/G\right]=\frac{P\left[D\right]P\left[G/D\right]}{P\left[D\right]P\left[G/D\right]+P\left[\bar{D}\right]P\left[G/\bar{D}\right]}$$

$$P\left[D/G\right]=\frac{0{,}04\,.\,0{,}95}{0{,}04\,.\,0{,}95+0{,}96\,.\,0{,}02}=\frac{0{,}038}{0{,}038+0{,}0192}=0{,}664$$

11. En el punto de partida de un laberinto hay tres orificios iguales A, B y C. Si una rata elige A vuelve al punto de partida después de recorrer dos metros. Si elige B recorre cinco metros y vuelve al mismo punto. Si elige C sale al exterior recorriendo un metro. ¿Por término medio que distancia recorre una rata antes de salir, si siempre elige un orificio distinto de los seleccionados en veces anteriores?

Solución:



Itinerarios:

ABC	8 m
BAC	8 m
AC	3 m
BC	6 m
C	1 m

Las distancias recorridas son:

$$d\left[ABC\right]=8\text{ m} \qquad d\left[BAC\right]=8\text{ m} \qquad d\left[AC\right]=3\text{ m}$$

$$d\left[BC\right]=6\text{ m} \qquad d\left[C\right]=1\text{ m}$$

Las probabilidades de las distancias recorridas:

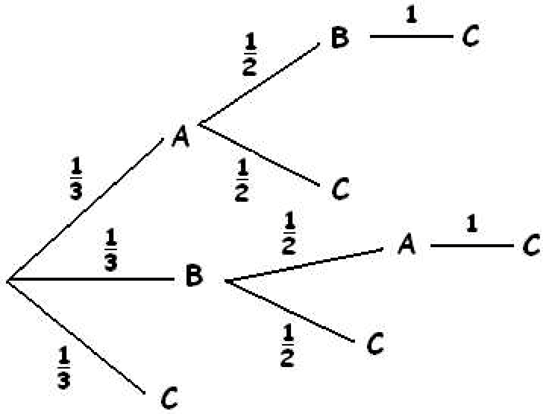
$$P\left[ABC\right]=P\left[A\right]\,.P\left[B/A\right]\,.P\left[C\right] = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.1 = \frac{1}{6}$$

$$P\left[BAC\right]=P\left[B\right]\,.P\left[A/B\right]\,.P\left[C\right] = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.1 = \frac{1}{6}$$

$$P\left[AC\right]=P\left[A\right]\,.P\left[C/A\right] = \frac{1}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P\left[BC\right]=P\left[B\right]\,.P\left[C/B\right] = \frac{1}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P\left[C\right]= \frac{1}{3}$$



La distribución de probabilidad:

	ABC	BAC	AC	BC	C
d_i	8	8	3	6	1
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

La distancia media recorrida es:

$$\mu = E\left[d\right] = \sum_{i=1}^{4} d_i\,.\,p_i = 8\,.\,\frac{1}{6} + 8\,.\,\frac{1}{6} + 3\,.\,\frac{1}{6} + 6\,.\,\frac{1}{6} + 1\,.\,\frac{1}{3} = \frac{27}{6} = 4{,}5\ \text{m}$$

DISTRIBUCIONES PROBABILIDAD VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

- **DISTRIBUCIÓN DE BERNOUILLI**

Consiste en un experimento aleatorio que admite sólo dos resultados excluyentes:

$$\begin{cases} \text{Suceso } A(\text{éxito}) \text{ con probabilidad } P(A) = p \\ \\ \text{Suceso } \overline{A}(\text{fracaso}) \text{ con probabilidad } P(\overline{A}) = q \end{cases} \qquad p + q = 1$$

En esta distribución de Bernouilli hay que observar:

- Depende sólo del parámetro p
- La media, varianza y desviación típica son: $\mu = p \qquad \sigma^2 = p.q \qquad \sigma = \sqrt{p.q}$

- **DISTRIBUCIÓN BINOMIAL**

La distribución binomial es la repetición de n pruebas de Bernouilli, es decir, cuando se realizan n pruebas de Bernouilli *sucesivas* e *independientes*.

Se denomina variable binomial:

X = "número de veces que ocurre el suceso A (éxito) en las n pruebas"

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \, q^{n-k} \quad \text{denotándolo por } b(n,\ p)$$

En esta distribución Binomial hay que observar:

- Depende de los parámetros (n, p)
- La media, varianza y desviación típica son: $\mu = n.p \qquad \sigma^2 = n.p.q \qquad \sigma = \sqrt{n.p.q}$

- Si X es una variable binomial de parámetros n y p $\left[b(n, p)\right]$, si el tamaño n de la muestra es grande y ni p ni q son próximos a cero, se puede considerar que X sigue aproximadamente una distribución normal $N\left[\mu = n.\,p\,;\ \sigma = \sqrt{n.p.q}\right]$

y, por tanto, la variable $z = \dfrac{X - n.p}{\sqrt{n.p.q}} \sim N(0,1)$ (Teorema de Moivre)

En general, es aceptable la transformación de una variable aleatoria binomial a una variable aleatoria normal cuando: $p \leq 0,5$ y $n \, . \, p > 5$

🕮 Hay que tener en cuenta que para utilizar correctamente esta transformación de una variable aleatoria discreta X (con distribución binomial) en una variable aleatoria continua z (con distribución normal) es necesario hacer una corrección de continuidad.

es decir,

$$P(X = a) \; = \; \xrightarrow{\text{al considerar X como continua}} \; = \; P(a - 0,5 \leq X \leq a + 0,5)$$

$$P(a \leq X \leq b) \; = \; \xrightarrow{\text{al considerar X como continua}} \; = \; P(a - 0,5 \leq X \leq b + 0,5)$$

Ejemplo.- El 30% de un determinado pueblo ve un concurso que hay en televisión. Desde el concurso se llama por teléfono a 10 personas del pueblo elegidas al azar. Calcular la probabilidad de que, entre las 10 personas, estuvieran viendo el programa:

a) Más de ocho personas
b) Algunas de las diez personas
c) Calcular la media y desviación típica

Solución:

Se trata de una distribución binomial con $n = 10$ y $p = 0,3$, es decir,

$$b(10\,;\ 0,3) \ \equiv \ b(10\,;\ k\,;\ 0,3) \ \text{con} \ \ k \equiv \text{éxitos}: \ P(X = k) = \binom{n}{k}\ p^k\ q^{n-k}$$

Llamando X = "número de personas que están viendo el programa"

a) $P\left[X > 8\right] = P\left[X = 9\right] + P\left[X = 10\right] = \left[\binom{10}{9}\ 0,3^9 \, . \, 0,7\right] + \left[\binom{10}{10}\ 0,3^{10} \, . \, 0,7^0\right] =$

$$= 10 \, . \, 0,3^9 \, . \, 0,7 + 0,3^{10} = 0,000144$$

Tienes que saber:

Permutaciones: $\begin{matrix} 0! = 1 \\ 1! = 1 \end{matrix} \begin{cases} 5! = 5.\,4.\,3.\,2.\,1 \\ 4! = 4.\,3.\,2.\,1 \\ 3! = 3.\,2.\,1 \end{cases} \mapsto \begin{matrix} 5! = 5.\,4! \\ 5! = 5.\,4.3! \end{matrix}$

Propiedades de los números combinatorios:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,.\,(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \quad \Rightarrow \quad \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,.\,(n-1)!} = \frac{n\,.(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,.\,\left[n-(n-k)\right]!} = \frac{n!}{(n-k)!\,.\,k!}$$

observa que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \mapsto \begin{matrix} \binom{10}{1} = \binom{10}{10-1} = \binom{10}{9} \\ \\ \binom{10}{8} = \binom{10}{10-8} = \binom{10}{2} \end{matrix}$

con lo cual, $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} \Rightarrow \begin{cases} \binom{10}{9} = \dfrac{10!}{9!\,(10-1)!} = \dfrac{10\,.\,9!}{9!\,.\,1!} = \dfrac{10}{1} = 10 \\ \\ \binom{10}{10} = \dfrac{10!}{10!\,(10-10)!} = \dfrac{1}{0!} = \dfrac{1}{1} = 1 \end{cases}$

b) $P\left[X > 0\right] = 1 - P\left[X = 0\right] = 1 - \binom{10}{0}\, 0,3^0\,.\,0,7^{10} = 1 - 0,7^{10} = 0,972$

c) Media: $\mu = n\,.\,p = 10\,.\,0,3 = 3$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{10.0,3.0,7} = \sqrt{2,1} = 1,45$

Ejemplo (APROXIMACIÓN DE UNA BINOMIAL A UNA NORMAL).-

El 7% de los pantalones de una determinada marca salen con algún defecto. Se empaquetan en caja de 80 pantalones para diferentes tiendas. ¿Cuál es la probabilidad de que en una caja haya entre 8 y 10 pantalones defectuosos?

Solución:

Sea X = "número de pantalones defectuosos en una caja"

Se trata de una distribución binomial (los pantalones son o no son defectuosos), es decir, una binomial con $n = 80$ y $p = 0,07$: $b(80\,;\ 0,07)$, donde:

$$\mu = n\ .\ p = 80\,.\ 0,07 = 5,6 \qquad\qquad \sigma = \sqrt{n\ .\ p\ .\ q} = \sqrt{80\ .0,07\ .\ 0,93} = 2,28$$

Adviértase que se dan las condiciones para aproximar la distribución discreta binomial a una distribución continua normal:

$$p = 0,07 \leq 0,5 \quad y \quad n.p = 80\,.\ 0,07 = 5,6 > 5$$

con lo que, $b(n\,;\ p) \quad \sim \quad N\left[\mu = n.\ p\,;\ \sigma = \sqrt{n.p.q}\right]$

$$b(80\,;\ 0,07) \quad \sim \quad N\left[5,6\,;\ 2,28\right]$$

Para utilizar correctamente la transformación de una variable aleatoria discreta X (distribución binomial) en una variable aleatoria continua z (con distribución normal) es necesario hacer una corrección de continuidad:

$$P\left[8 \leq X \leq 10\right] \overset{\text{TRANSFORMACIÓN}}{=} P\left[7,5 \leq X' \leq 10,5\right] \overset{\substack{\text{TIPIFICANDO} \\ N(5,6\,;\,2,28)}}{=}$$

$$\overset{\substack{\text{TIPIFICANDO} \\ N(5,6\,;\,2,28)}}{=} \quad P\left[\frac{7,5-5,6}{2,28}\frac{X'-5,6}{2,28} \leq \frac{10,5-5,6}{2,28}\right] == P\left[0,83 \leq z \leq 2,15\right] =$$

$$= P\left[z > 0,83\right] - P\left[z > 2,15\right] = 0,2033 - 0,0158 = 0,1875$$

- **DISTRIBUCIÓN DE POISSON**

Una variable aleatoria X se dice que sigue una distribución de probabilidad de Poisson si puede tomar todos los valores enteros 0, 1, 2, ... , n, ... con probabilidades:

$$P\left[X = k\right] = \frac{\lambda^k}{k!} \, . \, e^{-\lambda}$$

En esta distribución de Poisson hay que observar:

- Depende sólo del parámetro λ

- La media, varianza y desviación típica son: $\mu = \lambda \qquad \sigma^2 = \lambda \qquad \sigma = \sqrt{\lambda}$

- En general, cuando $n > 50$ y $p < 0{,}1$, es decir, cuando $n \, . \, p < 5$, la distribución de Poisson de parámetro $\left(\lambda = n.p\right)$ es una buena aproximación de la distribución binomial.

- Si $\lambda > 10$ se puede aproximar una distribución de Poisson $P\left[\lambda\right]$ por una distribución normal $N\left[\lambda, \sqrt{\lambda}\right]$, con la correspondiente corrección de continuidad.

- Las distribuciones de Poisson son reproductivas, dadas $X \sim P\left[\lambda_1\right]$ e $Y \sim P\left[\lambda_2\right]$ independientes se verifica $(X + Y) \sim P\left[\lambda_1 + \lambda_2\right]$.

- Dadas n pruebas independientes $X \sim P\left[\lambda\right]$ se verifica

$P\left[n \, ; \lambda\right] \quad \mapsto \quad N\left[n.\lambda \, ; \, \sqrt{n.\lambda}\right]$

Son ejemplos de variables de Poisson:

- El número de piezas defectuosas en una gran muestra tomada de un lote en donde la proporción de piezas defectuosas es pequeña.

- El número de llamadas telefónicas recibidas en una central durante cierto tiempo.

- El número de accidentes ocurridos durante un cierto tiempo.

Ejercicio.- Una compañía aérea observa que el número de componentes que fallan antes de cumplir 100 horas de funcionamiento es una variable aleatoria de Poisson. Si el número promedio de fallos es ocho. Se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que falle un componente en 25 horas?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que fallen menos de dos componente en 50 horas?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que fallen por lo menos tres componentes en 125 horas?

Solución:

Sea la variable aleatoria discreta X = "nº componentes que fallan antes de 100 horas"
El parámetro $\lambda = E\left[X\right] = 8$

a) Considerando ciertas condiciones de regularidad, se puede asumir que la variable: ξ = "nº componentes que fallan antes de 25 horas" sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda_\xi = E\left[\xi\right] = \dfrac{8}{4} = 2$

$$P\left[\xi = k\right] = \frac{\lambda_\xi^k}{k!} \,.\, e^{-\lambda} \xrightarrow{\lambda_\xi = 2} P\left[\xi = 1\right] = \frac{2}{1!} \,.\, e^{-2} = \frac{2}{e^2} = 0{,}27067$$

b) Análogamente, la v.a. η = "nº componentes que fallan antes de 50 horas" sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda_\eta = E\left[\eta\right] = \dfrac{8}{2} = 4$

$$P\left[\eta < 2\right] = P\left[\eta = 0\right] + P\left[\eta = 1\right] = \left[\frac{4^0}{0!} \,.\, e^{-4}\right] + \left[\frac{4^1}{1!} \,.\, e^{-4}\right] == \left[1 + 4\right] . \, e^{-4} = 5 \,.\, e^{-4} = 0{,}0916$$

c) La v.a. Y = "nº componentes que fallan antes de 125 horas" sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 10$

$$P\left[Y \geq 3\right] = 1 - P\left[Y < 3\right] = 1 - \left(P\left[Y = 0\right] + P\left[Y = 1\right] + P\left[Y = 2\right]\right) =$$

$$= 1 - \left(\left[\frac{10^0}{0!} \,.\, e^{-10}\right] + \left[\frac{10^1}{1!} \,.\, e^{-10}\right] + \left[\frac{10^2}{2!} \,.\, e^{-10}\right]\right) = 1 - \left[1 + 10 + 50\right] . \, e^{-10} = 0{,}9972$$

Ejercicio.- Un servicio dedicado a la reparación de electrodomésticos recibe por término medio 15 llamadas diarias. Determinar la probabilidad de que reciba un día más de 20 llamadas.

Solución:

Sea $\xi =$ "número de llamadas recibidas al día"

La variable aleatoria $\xi \sim P\left[\lambda = 15\right]: \ P\left[X = k\right] = \dfrac{15^k}{k!} \, . \, e^{-15}$

$\lambda = 15 > 10: \ P\left[\lambda\right] \longrightarrow N\left[15, \sqrt{15}\right]$

$$P\left[\xi > 20\right] = P\left[\frac{\xi - 15}{\sqrt{15}} > \frac{(20 - 0{,}5) - 15}{\sqrt{15}}\right] = P\left[z > 1{,}16\right] = 0{,}1230$$

Ejercicio.- En una fábrica se sabe que la probabilidad de que r artículos sean defectuosos es $P\left[\xi = r\right] = \dfrac{4^r \, . \, e^{-4}}{r!}$. Determinar la probabilidad de que en 100 días el número de artículos defectuosos esté comprendido entre (400, 600)

Solución:

Se trata de una distribución de Poisson $P\left[X = k\right] = \dfrac{\lambda^k}{k!} \, . \, e^{-\lambda}$, $\lambda = 4$, $\sigma = \sqrt{4} = 2$

En 100 días $(n = 100)$ $\left[\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\right]$

$$\begin{cases} E\left[\xi\right] = n.\lambda = 100 \, . \, 4 = 400 \\ V\left[\xi\right] = n.\sigma^2 = 100 \, . \, 4 = 400 \quad \sigma_\xi = \sqrt{400} = 20 \end{cases}$$

$\xi \sim N\left[400 \, ; \, 20\right]$

$$P\left[400 \le \xi \le 600\right] = P\left[\frac{400 - 400}{20} \le \frac{\xi - 400}{20} \le \frac{600 - 400}{20}\right] = P\left[0 \le z \le 10\right] =$$

$$= P\left[z \ge 0\right] - P\left[z \ge 10\right] = 0{,}5$$

DESIGUALDAD DE CHEBYSHEV.- Sea una variable aleatoria X , $E[X] = \mu_x$, $Var[X] = \sigma_x^2$, el teorema de Chebyshev establece:

$$\boxed{P\left[|X - \mu_x| \ge k \right] \le \frac{\sigma^2}{k^2}}$$

$$P\left[|X - \mu_x| \ge k \right] + P\left[|X - \mu_x| \le k \right] = 1 \quad \mapsto \quad \boxed{P\left[|X - \mu_x| \le k \right] \ge 1 - \frac{\sigma^2}{k^2}}$$

Chebyshev proporciona la estimación de la probabilidad de que una variable aleatoria asuma un valor dentro de k desviaciones estándar de su media, para cualquier valor k.

Ejercicio.- Se desea conocer el número de automóviles que se deben poner a la venta durante un periodo determinado para que se satisfaga una demanda media de 300 unidades con una desviación típica de 100 unidades, con una probabilidad no inferior al 75%.

Solución:

Sea la variable aleatoria X = "número de automóviles a la venta"

$\mu = 300$, $\sigma = 100$

Según Chebyshev:

$$P\left[|X - \mu_x| \le k \right] \ge 1 - \frac{\sigma^2}{k^2} \longrightarrow P\left[\mu_x - k \le X \le \mu_x + k \right] \ge 1 - \frac{\sigma^2}{k^2}$$

$$P\left[300 - k \le X \le 300 + k \right] \ge \overbrace{1 - \frac{100^2}{k^2}}^{0,75}$$

$$0,75 = 1 - \frac{100^2}{k^2} \quad \mapsto \quad \frac{100^2}{k^2} = 0,25 \quad \mapsto \quad k^2 = \frac{100^2}{0,25} \quad \mapsto \quad k = \sqrt{\frac{100^2}{0,25}} = 200$$

$300 + k = 200 + 300 = 500$ automóviles

Ejercicio.- La demanda media de un producto es de 100 unidades con una desviación típica de 50 unidades.

a) Calcular la cantidad del producto que se debe tener a la venta para satisfacer la demanda de forma que puedan ser atendidos al menos el 75% de los clientes.

b) Calcular la cantidad del producto que debe estar a la venta para *asegurar* la demanda con una probabilidad no menor que el 60%.

Solución:

Sea la variable aleatoria X = "unidades del producto a la venta"

a) $\mu = 100$, $\sigma = 50$

Según Chebyshev:

$$P\Big[\,|X-\mu_x| \le k\,\Big] \ge 1-\frac{\sigma^2}{k^2} \quad \longrightarrow \quad P\Big[\,\mu_x - k \le X \le \mu_x + k\Big] \ge 1-\frac{\sigma^2}{k^2}$$

$$P\Big[\,100-k \le X \le 100+k\Big] \ge \overbrace{1-\frac{50^2}{k^2}}^{0,75}$$

$$0,75 = 1-\frac{50^2}{k^2} \quad \mapsto \quad \frac{50^2}{k^2} = 0,25 \quad \mapsto \quad k^2 = \frac{50^2}{0,25} \quad \mapsto \quad k = \sqrt{\frac{50^2}{0,25}} = 100$$

$100 + k = 100 + 100 = 200$ unidades

b) $$P\left[\underbrace{100-k}_{\text{cota inferior}} \le X \le \underbrace{100+k}_{\text{cota superior}}\right] \ge \overbrace{1-\frac{50^2}{k^2}}^{0,60}$$

$$0,60 = 1-\frac{50^2}{k^2} \quad \mapsto \quad \frac{50^2}{k^2} = 0,40 \quad \mapsto \quad k^2 = \frac{50^2}{0,40} \quad \mapsto \quad k = \sqrt{\frac{50^2}{0,40}} \approx 79$$

$100 - k = 100 - 79 = 21$ unidades

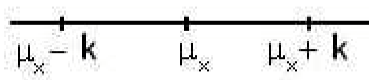
Ejercicio.- En un cine de verano hay instaladas 800 sillas, sabiendo que el número de asistentes es una variable aleatoria de media 600 y desviación típica 100.
¿Qué probabilidad existe de que el número de personas que vaya al cine un día cualquiera sea superior al número de sillas instaladas?

Solución:

Sea la variable aleatoria X = "número de sillas del cine"

c) $\mu = 600$, $\sigma = 100$

$$P\big[X > 800\big] < P\Big[\,|X - \mu_x| > k\,\Big] \le \frac{\sigma^2}{k^2}$$



$$\mu_x + k = 800 \quad \mapsto \quad k = 800 - 600 = 200$$

$$P\big[X > 800\big] \le \frac{100^2}{200^2} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Ejercicio.- En una plaza de toros al finalizar el festejo esperan al autobús una media de 7000 personas con una desviación típica de 350. Sabiendo que la capacidad de los autobuses es de 50 personas. ¿Cuántos autobuses son necesarios para que el servicio se encuentre bien atendido con una probabilidad de al menos el 80%?

Solución:

Sea la variable aleatoria X = "número de autobuses"

Según Chebyshev:

$$P\Big[\,|X - \mu_x| \le k\,\Big] \ge 1 - \frac{\sigma^2}{k^2} \longrightarrow P\big[\,\mu_x - k \le X \le \mu_x + k\big] \ge 1 - \frac{\sigma^2}{k^2}$$

$$P\big[\,7000 - k \le X \le 7000 + k\big] \ge \overbrace{1 - \frac{350^2}{k^2}}^{0,80}$$

$$0,80 = 1 - \frac{350^2}{k^2} \quad \mapsto \quad \frac{350^2}{k^2} = 0,20 \quad \mapsto \quad k^2 = \frac{350^2}{0,20} \quad \mapsto \quad k = \sqrt{\frac{350^2}{0,20}} = 782,62$$

$$7000 + k = 7000 + 782,62 \approx 7783 \longrightarrow \text{número de autobuses} = \frac{7783}{50} \approx 156$$

@ Portal Fuenterrebollo