VARIABLES ALEATORIAS UNIDIMENSIONALES

VARIABLE ALEATORIA

Es una función que asigna un valor numérico a cada suceso elemental del espacio muestral. Más concretamente, es una variable cuyo valor numérico está determinado por el resultado de un experimento aleatorio.

Las variables aleatorias se designan con letras mayúsculas X, Y, ... , y sus valores se denotan con letras minúsculas x, y, ... La variable aleatoria puede tomar un número numerable o no numerable de posibles valores, dando lugar a dos tipos de variables aleatorias: **discretas** y **continuas**.

VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

Se dice que una variable aleatoria X es discreta cuando toma un número finito o infinito numerable de valores reales.

Así, una variable aleatoria discreta sería el número de llamadas telefónicas que entran en una centralita durante un periodo de tiempo; el número de depósitos de una entidad bancaria; el número de piezas defectuosas que aparecen en una proceso de fabricación, etc.

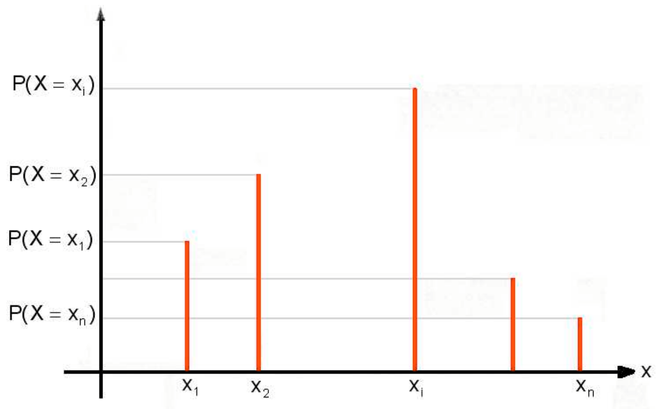
FUNCIÓN de PROBABILIDAD o FUNCIÓN de CUANTÍA: Tabla formada por los valores que toma la variable junto con sus probabilidades.

Sea X una variable aleatoria discreta que toma un número finito de valores $x_1, x_2, \cdots, x_n$; indicando la probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor particular x_i por: $p_i = P(X = x_i) = P(x_i)$

X	x_1	x_2	$\cdots\cdots$	x_i	$\cdots\cdots$	x_n
$P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	$\cdots\cdots$	$P(X = x_i)$	$\cdots\cdots$	$P(X = x_n)$

siendo $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$

La representación gráfica es un diagrama de barras:

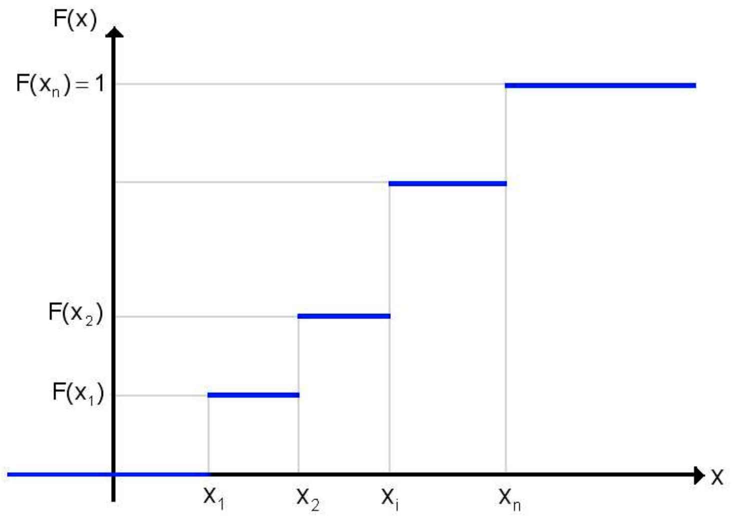


FUNCIÓN de DISTRIBUCIÓN: Sea una variable aleatoria discreta X, se denomina función de distribución de X a la función acumulativa, no negativa, continua por la derecha, siendo $F(-\infty) = 0$ y $F(\infty) = 1$

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i) = \sum_{x_i = x_1}^{x} P(X = x_i)$$

representa la suma de las probabilidades puntuales hasta el valor x inclusive de la variable aleatoria discreta X.

Gráficamente, esta función adopta una forma de escalera, tomando los saltos en los valores aislados que tome la variable, siendo en cada uno de éstos continua por la derecha, como se muestra en el dibujo.



Se tiene que,

$$P(X > x) = 1 - P(X \le x) = 1 - F(x)$$

$$P(x_1 < X \le x_2) = P(X \le x_2) - P(X \le x_1) = F(x_2) - F(x_1)$$

Media o esperanza matemática: La media o esperanza matemática de una variable aleatoria discreta X viene dada por la expresión:

$$\mu_X = E(X) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \,.\, P(X = x_i) & \text{Si X es discreta finita} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} x_i \,.\, P(X = x_i) & \text{Si X es discreta finita numerable} \end{cases}$$

En el caso de ser discreta numerable hay que suponer que la serie es absolutamente convergente, es decir, $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \,.\, P(X = x_i) < \infty$

Si $X = k$ constante $\mapsto \quad \mu_X = E(k) = k$

Varianza. Desviación típica: La varianza de una variable aleatoria discreta X viene dada por la esperanza siguiente:

$$\sigma_X^2 = E(X - \mu_X)^2 = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_X)^2 \,.\, P(X = x_i) & \text{Si X es discreta finita} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mu_X)^2 \,.\, P(X = x_i) & \text{Si X es discreta finita numerable} \end{cases}$$

Si $X = k$ constante $\mapsto \quad \sigma_X^2 = E(k - k) = E(0) = 0$

La desviación típica es la raíz cuadrada positiva de la varianza, viene dada por

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \begin{cases} \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_X)^2 \,.\, P(X = x_i)} & \text{Si X es discreta finita} \\ \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mu_X)^2 \,.\, P(X = x_i)} & \text{Si X es discreta finita numerable} \end{cases}$$

Momentos: Dada una variable aleatoria discreta X se llama **momento de orden k** respecto del **parámetro c** a la esperanza matemática de la variable $\mathbf{(X - c)^k}$, es decir:

$$M_k = E(X - c)^k = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - c)^k \,.\, P(X = x_i) & \text{Si X es discreta finita} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - c)^k \,.\, P(X = x_i) & \text{Si X es discreta finita numerable} \end{cases}$$

- **Momentos respecto al origen cuando c $= 0$, se denotan por α_k**

$$\alpha_k = \sum_{i=1} x_i^k \,.\, P(X = x_i) \quad \mapsto \quad \begin{cases} \alpha_0 = \sum_{i=1} x_i^0 \,.\, P(X = x_i) = 1 \\ \alpha_1 = \sum_{i=1} x_i \,.\, P(X = x_i) = \mu_X \end{cases}$$

- **Momentos centrales cuando c $= \mu_X$, se denotan por μ_k**

$$\mu_k = E(X - \mu_X)^k = \sum_{i=1} (x_i - \mu_X)^k \,.\, P(X = x_i) \quad \mapsto \quad \begin{cases} \mu_0 = \sum_{i=1} (x_i - \mu_X)^0 \,.\, P(X = x_i) = 1 \\ \mu_1 = \sum_{i=1} (x_i - \mu_X)^1 \,.\, P(X = x_i) = 0 \\ \mu_2 = \sum_{i=1} (x_i - \mu_X)^2 \,.\, P(X = x_i) = \sigma_X^2 \end{cases}$$

Los momentos centrales y los momentos respecto al origen están relacionados por la expresión:

$$\mu_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} .(-\alpha_1)^i \,.\, \alpha_{k-i}$$

En particular:

$$\mu_2 = \sum_{i=0}^{2} \binom{2}{i} .(-\alpha_1)^i \,.\, \alpha_{2-i} = \binom{2}{0}.(-\alpha_1)^0 \,.\, \alpha_{2-0} + \binom{2}{1}.(-\alpha_1)^1 \,.\, \alpha_{2-1} + \binom{2}{2}.(-\alpha_1)^2 \,.\, \alpha_{2-2} =$$

$$= \alpha_2 - 2.\alpha_1^2 + \alpha_1^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 \qquad \boxed{\mu_2 = \sigma_X^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2}$$

MEDIANA Y CUARTILES

Sea una variable aleatoria discreta X, con función de distribución $F(x)$, se define la Mediana como el punto mínimo M donde $F(M) \geq 0,5$

Análogamente para los cuartiles Q_1 y Q_3:

El primer cuartil Q_1 es el punto mínimo donde $F(Q_1) \geq 0,25$

El tercer cuartil Q_3 es el punto mínimo donde $F(Q_3) \geq 0,75$

El rango o recorrido intercuartílico es $RC = Q_3 - Q_1$

- La Moda representa el valor de la variable aleatoria que más se repite ó el más probable, es decir, el que maximiza la función de probabilidad.

VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

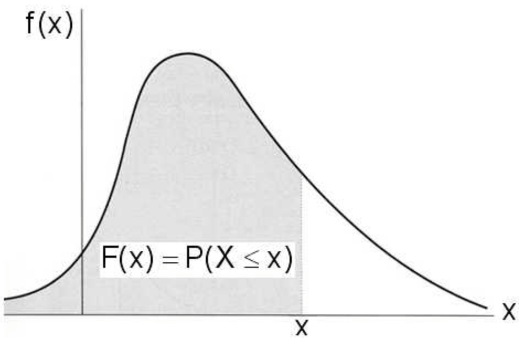
Se dice que una variable aleatoria X es continua si puede tomar un número infinito (no numerable) de valores, o bien, si puede tomar un número infinito de valores entre dos puntos de la recta real.

Situaciones que hacen referencia a tiempo, peso o longitud son ejemplos de una variable aleatoria continua.

FUNCIÓN de DISTRIBUCIÓN: Sea una variable aleatoria continua X, se denomina función de distribución de X a la función acumulativa, continua por la derecha, no negativa

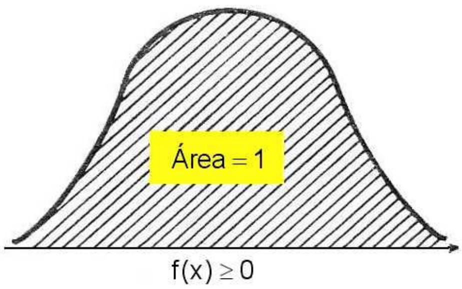
$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

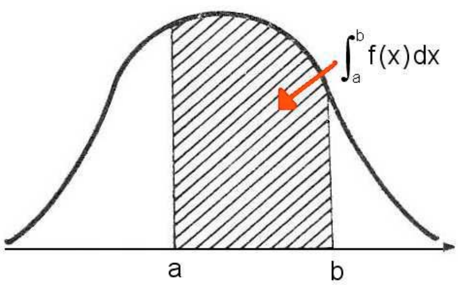
$$F(-\infty) = 0 \qquad F(\infty) = 1$$



FUNCIÓN de DENSIDAD: Dada una variable aleatoria X, una función real $f(x)$ no negativa es una **función de densidad de probabilidad** de X (o simplemente **función de densidad**) si el área encerrada entre su curva y el eje OX es igual a la unidad y si, además, la probabilidad de que X se encuentre entre dos valores a y b con $a < b$, es igual al área comprendida entre estos dos valores, es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \qquad\qquad P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$





- La probabilidad de que X tome un valor particular es cero:

$$P(a) = P(a < X < a) = \int_{a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

- $$\begin{cases} P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a) = \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx \\ P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx \end{cases}$$

Siendo, $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \quad \mapsto \quad f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$

- Si X toma valores en el intervalo (a, b) entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = 1 \quad y \quad F(x) = \begin{cases} 0 & x \le a \\ \int_a^x f(t)\,dt & a < x < b \\ 1 & x \ge b \end{cases}$$

TRANSFORMACIONES LINEALES DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA:

Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad o cuantía $f_X(x)$, al realizar una transformación monótona (creciente o decreciente) $Y = g(X)$, se calcula la función de densidad de la variable Y mediante:

$$f_Y(y) = f_X\left[g^{-1}(y)\right] \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right|$$

- Sea $Y = a + b\,X$ donde X es una variable aleatoria continua

$$y = a + b\,x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{y-a}{b} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{b}$$

Función de densidad de la transformada: $f_Y(y) = f_X\left[\dfrac{y-a}{b}\right] \cdot \dfrac{1}{|b|}$

Función de distribución de la transformada: $F_Y(y) = \begin{cases} F_X\left[\dfrac{y-a}{b}\right] & \text{sí } b > 0 \\ 1 - F_X\left[\dfrac{y-a}{b}\right] & \text{sí } b < 0 \end{cases}$

$E(Y) = a + b\,E(X)$

$Var(Y) = b^2\,Var(X)$

Media o esperanza matemática: La media o esperanza matemática de una variable aleatoria continua X viene dada por la expresión:

$$\mu_X = E(X) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx & X \in (-\infty, \infty) \\ \int_a^b x\,f(x)\,dx & X \in (a, b) \end{cases}$$

Cuando $X \in (-\infty, \infty)$ hay que suponer que la integral es absolutamente convergente, es decir $\int_{-\infty}^{\infty} |x|\,f(x)\,dx < \infty$

Varianza. Desviación típica: La varianza de una variable aleatoria continua X viene dada por la expresión:

$$\sigma_X^2 = E(X-\mu_X)^2 = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 \; f(x)\,dx & X \in (-\infty, \infty) \\ \int_a^b (x-\mu_X)^2 \, f(x)\,dx & X \in (a, b) \end{cases}$$

La desviación típica es la raíz cuadrada positiva de la varianza: $\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$

Momentos: Dada una variable aleatoria continua X se llama **momento de orden k** respecto del **parámetro c** a la esperanza matemática de la variable $\mathbf{(X-c)^k}$, es decir:

$$M_k = E(X-c)^k = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x-c)^k \; f(x)\,dx & X \in (-\infty, \infty) \\ \int_a^b (x-c)^k \, f(x)\,dx & X \in (a, b) \end{cases}$$

Cuando $X \in (-\infty, \infty)$ hay que suponer que la integral es absolutamente convergente, es decir $\int_{-\infty}^{\infty} \left|(x-c)^k\right| f(x)\,dx < \infty$

- **Momentos respecto al origen cuando $c = 0$, se denotan por α_k**

$$\alpha_k = E(X^k) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x^k \; f(x)\,dx & X \in (-\infty, \infty) \\ \int_a^b x^k \, f(x)\,dx & X \in (a, b) \end{cases} \longrightarrow \quad \alpha_0 = 1 \quad \alpha_1 = \mu_X$$

- **Momentos centrales cuando $c = \mu_X$, se denotan por μ_k**

$$\mu_k = E(X-\mu_X)^k = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^k \; f(x)\,dx & X \in (-\infty, \infty) \\ \int_a^b (x-\mu_X)^k \, f(x)\,dx & X \in (a, b) \end{cases} \longrightarrow \quad \mu_0 = 1 \quad \mu_1 = 0 \quad \mu_2 = \sigma_X^2$$

La relación entre los momentos centrales y los momentos respecto al origen es la misma que para las variables aleatorias discretas, teniendo:

$$\mu_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} . (-\alpha_1)^i . \; \alpha_{k-i}$$

en particular, $\mu_2 = \sigma_X^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = E(X^2) - \mu_X^2$

FUNCIÓN GENERATRIZ DE MOMENTOS

La función que genera los momentos de una variable aleatoria (discreta o continua) es la función generatriz, que se denota por

$$g_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \begin{cases} \sum_i P(x_i)\, e^{t x_i} & \text{variable aleatoria discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx & \text{variable aleatoria continua} \end{cases}$$

En el caso discreto, la serie correspondiente al valor esperado tendrá que ser convergente. Análogamente, en el caso continuo, la integral correspondiente al valor esperado tendrá que ser convergente.

La función generatriz de momentos $g_X(t)$ depende únicamente de t, y cuando $t = 0$,
$g_X(0) = E\left[e^0\right] = E(1) = 0$

Utilizando el desarrollo de una serie de Taylor para e^{tX}, se tiene:

$$e^{tX} = 1 + tX + \frac{(tX)^2}{2!} + \frac{(tX)^3}{3!} + \frac{(tX)^4}{4!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(tX)^i}{i!}$$

Tomando valores esperados:

$$g_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = E\left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(tX)^i}{i!}\right] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} E(X^i) = 1 + t\,E(X) + \frac{1}{2!} t^2 E(X^2) + \frac{1}{3!} t^3 E(X^3) + \cdots$$

Derivando sucesivamente la función generatriz $g_X(t)$ respecto a t , se obtiene:

$$g'_X(t) = E(X) + t\,E(X^2) + \frac{1}{2!} t^2 E(X^3) + \frac{1}{3!} t^3 E(X^4) + \cdots$$

$$g''_X(t) = E(X^2) + t\,E(X^3) + \frac{t^2}{2!} E(X^4) + \cdots$$

Particularizando para $t = 0$, resulta:

$$g'_X(0) = E(X) = \alpha_1 \qquad g''_X(0) = E(X^2) = \alpha_2 \qquad g'''_X(0) = E(X^3) = \alpha_3 \quad \cdots \quad g_X^{(k)}(0) = E(X^k) = \alpha_k$$

En caso de existir la función generatriz de momentos, se pude obtener cualquier momento respecto al origen α_k, pudiendo generalizar:

🕮 Si existe el momento de orden k, respecto al origen, para cualquier valor entero y positivo k, se tiene:

$$\alpha_k = g_X^{(k)}(0) = \left[\frac{d^k g_X(t)}{dt^k}\right]_{t=0}$$

Es decir, el momento respecto al origen de orden k, α_k, se puede obtener derivando la función generatriz de momentos k veces, respecto a t, y particularizando para $t = 0$

La función generatriz de momentos, cuando existe, se puede obtener como una serie de potencias de t, cuyos términos incluyen los momentos de la distribución:

$$g_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = 1 + t\,\alpha_1 + \frac{t^2}{2!}\alpha_2 + \frac{t^3}{3!}\alpha_3 + \cdots$$

FUNCIÓN CARACTERÍSTICA

La función característica φ de una variable aleatoria X es una función de variable real que toma valores complejos: $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\varphi(t) = E\left[e^{itX}\right]$

Teniendo en cuenta que $e^{itX} = \cos(tX) + i\,\mathrm{sen}(tX) \quad \Rightarrow \quad \left|e^{itX}\right| = \sqrt{\cos^2(tX) + \mathrm{sen}^2(tX)} = 1$

$$\varphi(t) = E\left[e^{itX}\right] = E\left[\cos(tX) + i\,\mathrm{sen}(tX)\right] = E\left[\cos(tX)\right] + i\,E\left[\mathrm{sen}(tX)\right]$$

Dependiendo del tipo de variable aleatoria que se considera, se tiene:

- Variable aleatoria discreta: $\varphi(t) = E\left[e^{itX}\right] = \sum_{j=1}^{\infty} e^{itx_j} \,.\, P\left[X = x_j\right]$
- Variable aleatoria discreta: $\varphi(t) = E\left[e^{itX}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX}.f(x)\,dx$

🕮 Si el momento de orden r de una variable aleatoria X existe, $\alpha_r = E\left[X^r\right]$, se puede derivar k veces la función característica $\varphi(t)$ respecto a t, siendo $0 \le k \le r$

$$\alpha_k = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{i^k} = \frac{1}{i^k}\frac{d^k}{dt^k}\varphi(t)\bigg|_{t=0} \qquad \text{con } k = 0,1,2,\cdots,r$$

🕮 Sea X una variable aleatoria X tal que $E\left[X^r\right] < \infty \quad \forall r \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \varphi(t)$ es infinitamente derivable y la función característica se puede obtener como:

$$\varphi(t) = 1 + (it)\,\alpha_1 + \frac{(it)^2}{2!}\alpha_2 + \frac{(it)^3}{3!}\alpha_3 + \cdots + \frac{(it)^k}{k!}\alpha_k + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(it)^j}{j!}\alpha_j$$

🕮 La relación entre la función generatriz de momentos $M(t)$ y la función característica $\varphi(t)$ viene dada por las siguientes expresiones:

$$M(t) = \varphi\left(\frac{t}{i}\right) \qquad\qquad \varphi(t) = M(it)$$

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN CARACTERÍSTICA

1. La función característica $\varphi(t)$ existe siempre para cualquier v.a. X
2. $\varphi(0)=1$
3. $|\varphi(t)|\leq 1$
4. Sea una v.a. X y sea Y una transformación lineal de la v.a. X, tal que $Y=aX+b$, con $a,b\in\mathbb{R}$, entonces: $\varphi_Y(t)=\varphi_{aX+b}(t)=e^{itb}\,\varphi_X(at)$

   $$\varphi_Y(t)=E\left[e^{itY}\right]=E\left[e^{it(aX+b)}\right]=E\left[e^{itaX}\,.\,e^{itb}\right]=e^{itb}\,.\,E\left[e^{itaX}\right]=e^{itb}\,.\,\varphi_X(at)$$

5. Sean $X_1, X_2, \cdots, X_n$ variables aleatorias independientes. Sea $S=\sum_{i=1}^{n} X_i$ una variable aleatoria. La función característica de S viene definida por:

   $$\varphi_S(t)=\prod_{i=1}^{n}\varphi_{X_i}(t)$$

6. Sea X una variable aleatoria simétrica respecto al origen, tal que $X=-X$, entonces

   $$\varphi_X(t)=\varphi_{-X}(t)=\varphi_X(-t)$$

7. X es una variable aleatoria simétrica respecto al origen, sí y sólo sí, la función característica $\varphi_X(t)$ es real.

PROPIEDADES DE LA MEDIA

- La esperanza de una constante es la propia constante: $E(k)=k$
- Sea v.a. X: $\begin{cases} E[k.X]=k.E[X] \\ E[k+X]=E[k]+E[X]=k+E[X] \end{cases}$
- Sea v.a. X acotada, $a\leq X\leq b \longrightarrow E(a)\leq E(X)\leq E(b)$
- Sea v. a. X con $g(X)$ y $h(X)$ funciones de X y variables aleatorias:

  $$E[a.g(x)+b.h(X)]=a.E[g(X)]+b.E[h(X)]$$

  Sí $g(X)\leq h(X) \Rightarrow E[g(X)]\leq E[h(X)]$

PROPIEDADES DE LA VARIANZA

- La varianza de una constante k es cero: $\text{Var}(k) = 0$
- $\text{Var}(k + X) = \text{Var}(k) + \text{Var}(X) = \text{Var}(X)$
- $\text{Var}(k.X) = k^2.\text{Var}(X)$

$$\text{Var}(k.X) = E\left[k.X - E(k.X)\right]^2 = E\left[k.X - k.E(X)\right]^2 = E\left[k.\left[X - E(X)\right]\right]^2 =$$
$$= E\left[k^2\left[X - E(X)\right]^2\right] = k^2.\,E\left[X - E(X)\right]^2 = k^2.\text{Var}(X)$$

- $\text{Var}(k.X + c) = k^2.\text{Var}(X)$

$$\text{Var}(k.X + c) = E\left[\left(k.X + c\right) - E(k.X + c)\right]^2 = E\left[k.X + \cancel{c} - k.E(X) - \cancel{c}\right]^2 = E\left[k.X - k.E(X)\right]^2 =$$
$$= E\left[k.\left[X - E(X)\right]\right]^2 = E\left[k^2\left[X - E(X)\right]^2\right] = k^2.\,E\left[X - E(X)\right]^2 = k^2.\text{Var}(X)$$

CAMBIO de ORIGEN y de ESCALA

- Sea una variable aleatoria X, se entiende como un cambio de origen k cuando se realiza la transformación $Y = X - c$

  Mediante esta transformación todos los valores de la variable aleatoria X se desplazan c unidades del eje de ordenadas manteniendo la misma posición relativa y la misma distancia entre ellos.

  Calculando el valor esperado de la nueva variable aleatoria transformada Y, resulta:

$$E\left[Y\right] = E\left[X - c\right] = E\left[X\right] - c \quad \text{es decir,} \quad \mu_Y = \mu_X - c$$

  En la varianza del cambio de origen: $\sigma_Y^2 = \text{Var}(Y) = \text{Var}(X - c) = \text{Var}(X)$

  Indicando que la varianza de la variable transformada por un cambio de origen queda invariante. Es decir, el cambio de origen lo único que hace es desplazar los valores de la variable inicial X manteniendo la misma posición relativa y, en consecuencia no modifica la dispersión.

- Se entiende como un cambio de escala e $(e \neq 0)$ cuando se realiza la transformación:

  $Y = \dfrac{X}{e}$

  Sí $e < 1$ $\mapsto$ Los nuevos valores transformados se alejan unos de otros y aumenta la dispersión respecto de X ó Y

  Sí $e > 1$ $\mapsto$ Los nuevos valores transformados se acercan unos a otros, es decir, se concentran y disminuye la dispersión respecto de X ó Y

Calculando el valor esperado de la nueva variable aleatoria transformada Y, resulta:

$$E[Y] = E\left[\frac{X}{e}\right] = \frac{E[X]}{e} = \frac{1}{e}\,.\,E(X) \qquad \text{es decir,} \quad \mu_Y = \frac{1}{e}\,.\,\mu_X$$

Interpretando que también se produce el mismo cambio de escala en el valor esperado o media de la variable.

En la varianza del cambio de escala: $\sigma_Y^2 = \text{Var}\left[\frac{X}{e}\right] = \frac{1}{e^2}\,.\,\text{Var}(X) = \frac{1}{e^2}\,.\,\sigma_X^2$

El cambio de escala modifica la dispersión de los datos de la variable aleatoria inicial X, dispersándose sí $e < 1$ o concentrándose sí $e > 1$

COEFICIENTE DE VARIACIÓN

Es una medida relativa a la dispersión, se define como: $CV_X = \frac{\sigma_X}{E[X]} = \frac{\sigma_X}{\mu_X}$

Expresa la dispersión de una variable aleatoria X respecto a su media. Es muy útil para comparar dos distribuciones de probabilidad.

El CV no tendría sentido cuando la variable X tome valores positivos y negativos, pues en este caso la media podría quedar compensada por los valores positivos y negativos y no reflejaría el tamaño de X. Es decir, el coeficiente de variación CV sólo tendrá sentido cuando X sea una variable aleatoria que toma solo valores positivos.

CAMBIO DE ORIGEN DEL CV: Sea la transformación $Y = X - c$

$$CV_Y = \frac{\sigma_Y}{\mu_Y} = \frac{\sqrt{\text{Var}(X-c)}}{E(X-c)} = \frac{\sqrt{\sigma_X^2}}{\mu_X - c} = \frac{\sigma_X}{\mu_X - c} \neq CV_X$$

Concluyendo que el cambio de origen afecta al coeficiente de variación CV

CAMBIO DE ESCALA DEL CV: Sea la transformación $Y = \frac{X}{e}$

$$CV_Y = \frac{\sigma_Y}{\mu_Y} = \frac{\sqrt{\text{Var}\left[\frac{X}{e}\right]}}{E\left[\frac{X}{e}\right]} = \frac{\sqrt{\frac{1}{e^2}\,.\,\sigma_X^2}}{\frac{1}{e}\,.\,\mu_X} = \frac{\frac{1}{e}\,.\,\sigma_X}{\frac{1}{e}\,.\,\mu_X} = \frac{\sigma_X}{\mu_X} = CV_X$$

Observando que el coeficiente de variación CV es invariante a los cambios de escala.

CAMBIO DE ORIGEN Y DE ESCALA DEL CV: Sea la transformación $Y = \frac{X-c}{e}$

$$CV_Y = \frac{\sigma_Y}{\mu_Y} = \frac{\sqrt{Var\left[\frac{X-c}{e}\right]}}{E\left[\frac{X-c}{e}\right]} = \frac{\sqrt{\frac{1}{e^2}.\sigma_X^2}}{\frac{1}{e}.(\mu_X - c)} = \frac{\frac{1}{e}.\sigma_X}{\frac{1}{e}.(\mu_X - c)} = \frac{\sigma_X}{\mu_X - c} \neq CV_X$$

El coeficiente de variación CV es invariante frente a cambios de escala, pero no frente al cambio de origen.

Con el cambio de origen se produce un cambio en la media de la variable aleatoria transformada Y, y en consecuencia cambia el coeficiente de variación.

MEDIANA. CUARTILES. MODA

Sea una variable aleatoria continua X, con función de densidad $f(x)$ y función de distribución $F(x)$, se define la Mediana como el punto M donde,

$$\int_{-\infty}^{M} f(x)\,dx = \frac{1}{2} \quad \text{también donde } F(M) = \frac{1}{2}$$

Análogamente en el caso de los cuartiles:

Primer Cuartil Q_1: $\int_{-\infty}^{Q_1} f(x)\,dx = \frac{1}{4}$ también donde $F(Q_1) = \frac{1}{4}$

Tercer Cuartil Q_3: $\int_{-\infty}^{Q_3} f(x)\,dx = \frac{3}{4}$ también donde $F(Q_3) = \frac{3}{4}$

El rango o recorrido intercuartílico es $RC = Q_3 - Q_1$

- La Moda representa el valor de la variable aleatoria que más se repite ó el más probable, es decir, el que maximiza la función de densidad.

TEOREMA DE CHEBYSHEV ó TCHEBYCHEFF

Establece la probabilidad máxima de que la variable aleatoria tome valores en los alrededores de la esperanza matemática (media de la distribución).

Para toda variable aleatoria X para la que existe su esperanza y su varianza, se verifica que, para cualquier valor numérico positivo **k:**

$$P\left[\,|X - \mu_x| \geq k\,\right] \leq \frac{\sigma_x^2}{k^2}$$

o también

$$P\left[\,|X - \mu_x| \leq k\,\right] \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2} \longrightarrow P\left[\,\mu_x - k \leq X \leq \mu_x + k\right] \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2}$$

EJERCICIOS RESUELTOS VARIABLE ALEATORIA UNIDIMENSIONAL

Ejercicio 1.- Un experimento consiste en lanzar tres veces una moneda. Sea la variable aleatoria: X ="número de caras que se obtienen". Se pide:

a) Distribución de probabilidad de X
b) Función de distribución de X. Representación gráfica
c) Media, varianza y desviación típica de X
d) Probabilidad de que salgan a lo sumo dos caras
e) Probabilidad de que salgan al menos dos caras

Solución:

a) Espacio muestral: $\Omega = \{(c,c,c),(c,c,e),(c,e,c),(e,c,c),(c,e,e),(e,c,e),(e,e,c),(e,e,e)\}$

$X(c,c,c) = 3$ $\quad P(X=3) = 1/8$

$X(c,c,e) = X(c,e,c) = X(e,c,c) = 2$ $\quad P(X=2) = 3/8$

$X(c,e,e) = X(e,c,e) = X(e,e,c) = 1$ $\quad P(X=1) = 3/8$

$X(e,e,e) = 0$ $\quad P(X=0) = 1/8$

La distribución de probabilidad será:

$X = x_i$	$P(X = x_i) = p_i$	$x_i \, . \, p_i$	x_i^2	$x_i^2 \, . \, p_i$
$x_1 = 0$	$1/8$	0	0	0
$x_2 = 1$	$3/8$	$3/8$	1	$3/8$
$x_3 = 2$	$3/8$	$6/8$	4	$12/8$
$x_4 = 3$	$1/8$	$3/8$	9	$9/8$
	1	$12/8 = 1{,}5$		$24/8 = 3$

b) La función de distribución: $F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \le x} p_i$

$x < 0 \qquad F(x) = P(X \le x) = P(\phi) = 0$

$0 \le x < 1 \qquad F(x) = P(X \le x) = P(X = 0) = 1/8$

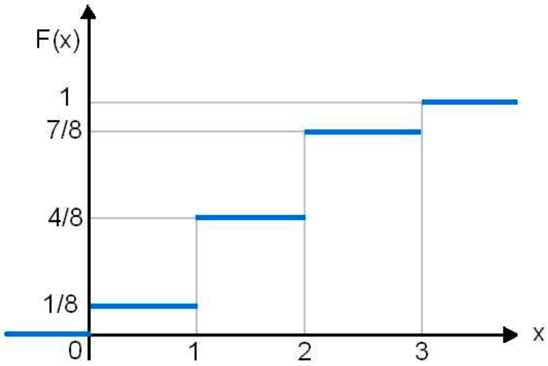
$1 \le x < 2 \qquad F(x) = P(X \le x) = P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = 1/8 + 3/8 = 4/8$

$2 \le x < 3 \qquad F(x) = P(X \le x) = P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1/8 + 3/8 + 3/8 = 7/8$

$x = 3 \qquad F(x) = P(X \le 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$

$x > 3 \qquad F(x) = P(X \le x) = P(\Omega) = 1$

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$
$F(x) = P(X \leq x)$	$1/8$	$4/8$	$7/8$	1



$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/8 & 0 \leq x < 1 \\ 4/8 & 1 \leq x < 2 \\ 7/8 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

c) Media, varianza y desviación típica de X

Media: $\alpha_1 = \mu_X = E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i \, . P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{4} x_i \, . \, p_i = \frac{12}{8} = 1{,}5$

$$\alpha_2 = E(X^2) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \, . P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \, . \, p_i = \frac{24}{8} = 3$$

Varianza: $\sigma_x^2 = E\left(X - \mu_X\right)^2 = \sum_{i=1}^{4} \left(x_i - \mu_x\right)^2 . \, P(X = x_i) = \alpha_2 - \alpha_1^2$

$$\sigma_x^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 3 - 1{,}5^2 = 0{,}75$$

Desviación típica: $\sigma_x = \sqrt{0{,}75} = 0{,}87$

d) Probabilidad de que salgan a lo sumo dos caras

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

o bien $P(X \leq 2) = F(2) = \frac{7}{8}$

e) Probabilidad de que salgan al menos dos caras

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

o bien $P(X \geq 2) = F(1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Ejercicio 2.- La variable aleatoria: X ="número de hijos por familia de una ciudad" tiene la siguiente distribución de probabilidad:

X	0	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	0,47	0,3	0,1	0,06	0,04	0,02	0,01

Se pide:

a) Media o esperanza matemática. Significado
b) Varianza y desviación típica
c) Si el Ayuntamiento de la ciudad paga 2000 euros por hijo e $Y = 2000 . X$, ¿cuál es la distribución de probabilidad?
d) Media, varianza y desviación típica de Y

Solución:

a)

$X = x_i$	$P(X = x_i) = p_i$	$x_i . p_i$	x_i^2	$x_i^2 . p_i$
$x_1 = 0$	0,47	0	0	0
$x_2 = 1$	0,3	0,3	1	0,3
$x_3 = 2$	0,1	0,2	4	0,4
$x_4 = 3$	0,06	0,18	9	0,54
$x_5 = 4$	0,04	0,16	16	0,64
$x_6 = 5$	0,02	0,10	25	0,5
$x_7 = 6$	0,01	0,06	36	0,36
	1	1		2,74

Media: $\alpha_1 = \mu_X = E(X) = \sum_{i=1}^{7} x_i . P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{7} x_i . p_i = 1$

Si se toma al azar una familia de la ciudad, el número de hijos que se espera que tenga por término medio es uno.

b) Varianza y desviación típica

Varianza: $\sigma_x^2 = E\left(X - \mu_X\right)^2 = \sum_{i=1}^{7} \left(x_i - \mu_x\right)^2 . P(X = x_i) = \alpha_2 - \alpha_1^2$

$\alpha_2 = E(X^2) = \sum_{i=1}^{7} x_i^2 . P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{7} x_i^2 . p_i = 2,74$

$\sigma_x^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 2,74 - 1^2 = 1,74$

Desviación típica: $\sigma_x = \sqrt{1,74} = 1,32$

c) Distribución de probabilidad de la variable $Y = 2000.X$

$Y = y_j$	$P(Y = y_j) = p_j$
$y_1 = 0$	0,47
$y_2 = 2.000$	0,3
$y_3 = 4.000$	0,1
$x_4 = 6.000$	0,06
$y_5 = 8.000$	0,04
$y_6 = 10.000$	0,02
$y_7 = 12.000$	0,01
	1

d) Media, varianza y desviación típica de Y

$$\mu_Y = \mu_{2000\,X} = E(2000.X) = 2000.E(X) = 2000.1 = 2.000$$

$$\sigma_Y^2 = \sigma_{2000\,X}^2 = Var(2000.X) = 2000^2.Var(X) = 2000^2.1{,}74 = 6.960.000$$

$$\sigma_Y = \sqrt{6.960.000} = 2638{,}18$$

Ejercicio 3.- Completar la ley de probabilidad , conociendo que la esperanza matemática es 1,8

X	0	1	2	3
$P(X = x_i) = p_i$	0,2	a	b	0,3

Solución:

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} p_i = 0{,}2 + a + b + 0{,}3 = 1 \quad \mapsto \quad a + b = 0{,}5$

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} x_i\,.\,p_i = a + 2b + 0{,}9 = 1{,}8 \quad \mapsto \quad a + 2b = 0{,}9$

Resolviendo el sistema: $\begin{cases} a + b = 0{,}5 \\ a + 2b = 0{,}9 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} b = 0{,}4 \\ a = 0{,}1 \end{matrix}$

Ejercicio 4.- Al lanzar cuatro monedas se considera el número de escudos obtenidos. De la variable aleatoria X así obtenida, se pide:

a) Ley de probabilidad. Representación gráfica

b) Función de distribución. Representación gráfica

c) Esperanza matemática y varianza

d) Mediana y moda de la distribución

e) Probabilidad de obtener más de uno y menos de tres escudos

Solución:

a) Sea X ='número de escudos en la tirada de cuatro monedas'

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} (c,c,c,c),(c,c,c,e),(c,c,e,c),(c,c,e,e),(c,e,c,c),(c,e,c,e),(e,c,c,c),(e,c,c,e), \\ (e,e,e,e),(e,e,e,c),(e,e,c,e),(e,e,c,c),(e,c,e,e),(e,c,e,c),(c,e,e,e),(c,e,e,c) \end{matrix} \right\}$$

$X(c,c,c,c) = 0$	$P(X=0) = 1/16$
$X(c,c,c,e) = X(c,c,e,c) = X(c,e,c,c) = X(e,c,c,c) = 1$	$P(X=1) = 4/16$
$X(c,c,e,e) = X(c,e,c,e) = X(e,c,e,c) =$ $X(e,e,c,c) = X(e,c,e,c) = X(c,e,c,e) = 2$	$P(X=2) = 6/16$
$X(e,e,e,c) = X(e,e,c,e) = X(e,c,e,e) = X(c,e,e,e) = 3$	$P(X=3) = 4/16$
$X(e,e,e,e) = 4$	$P(X=4) = 1/16$

La ley de probabilidad o función de cuantía:

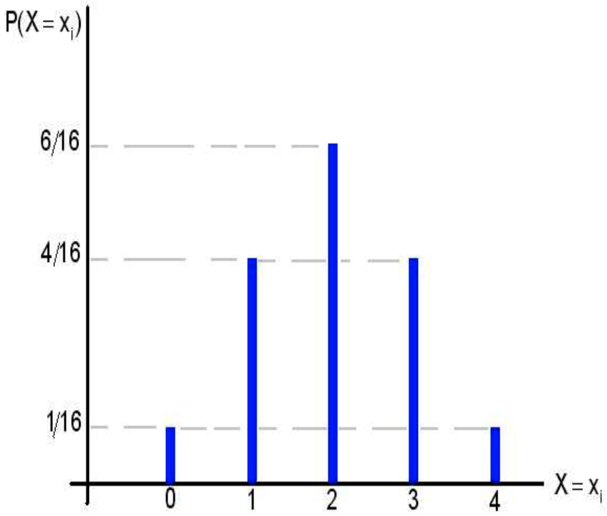
$X = x_i$	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$1/16$	$4/16$	$6/16$	$4/16$	$1/16$

b) Función de distribución:

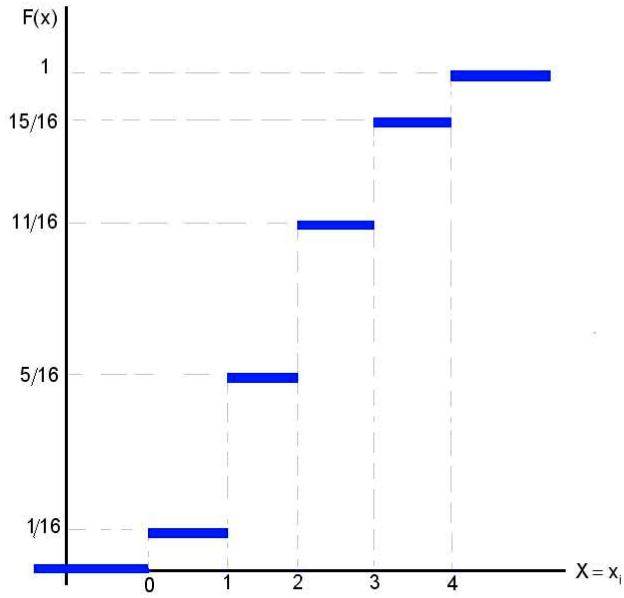
$X = x_i$	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$1/16$	$4/16$	$6/16$	$4/16$	$1/16$
$F(x) = P(X \le x)$	$1/16$	$5/16$	$11/16$	$15/16$	1

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/16 & 0 \le x < 1 \\ 5/16 & 1 \le x < 2 \\ 11/16 & 2 \le x < 3 \\ 15/16 & 3 \le x < 4 \\ 1 & x \ge 4 \end{cases}$$

Ley de Probabilidad



Función de distribución



c) Cálculo de la esperanza matemática y varianza

$X = x_i$	0	1	2	3	4	
$P(X = x_i)$	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16	
$x_i \,.P(X = x_i)$	0	4/16	12/16	12/16	4/16	$\sum_{i=1}^{5} x_i \,.P(X = x_i) = 2$
$x_i^2 \,.P(X = x_i)$	0	4/16	24/16	36/16	16/16	$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 \,.P(X = x_i) = 5$

Media: $\alpha_1 = \mu_X = E(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i \,.P(X = x_i) = 2$

$$\alpha_2 = E(X^2) = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 \,.P(X = x_i) = 5$$

Varianza: $\sigma_X^2 = Var(X) = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 5 - 2^2 = 1$

d) Observando la ley de probabilidad la moda $M_d = 2$

Observando la función de distribución la mediana $M_e = 2$ por ser $F(x = 2) = 11/16$ el primer valor que iguala o deja por debajo a 0,5

e) $P(1 < X < 3) = P(X = 2) = \dfrac{6}{16} = 0,375$ o bien $P(1 < X < 3) = F(2) - F(1) = \dfrac{11}{16} - \dfrac{5}{16} = \dfrac{6}{16}$

Ejercicio 5.- Calcular la media, varianza y coeficiente de variación de la variable aleatoria que tiene como función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ 0,2 & 2 \le x < 4 \\ 0,55 & 4 \le x < 6 \\ 0,85 & 6 \le x < 8 \\ 1 & x \ge 8 \end{cases}$$

Solución:

La ley de probabilidad o función de cuantía:

$X = x_i$	2	4	6	8
$P(X = x_i)$	0,2	0,35	0,30	0,15

Adviértase que la función de distribución $F(x)$ es una función acumulativa, por tanto:

$P(X=2) = F(2) - F(0) = 0,2$ $\qquad$ $P(X=4) = F(4) - F(2) = 0,55 - 0,2 = 0,35$

$P(X=6) = F(6) - F(4) = 0,85 - 0,55 = 0,30$ $\qquad$ $P(X=8) = F(8) - F(6) = 1 - 0,85 = 0,15$

Cálculo de la esperanza matemática y varianza

$X = x_i$	2	4	6	8	
$P(X = x_i)$	0,2	0,35	0,30	0,15	
$x_i\,.P(X = x_i)$	0,4	1,4	1,8	1,2	$\sum_{i=1}^{4} x_i\,.P(X = x_i) = 4,8$
$x_i^2\,.P(X = x_i)$	0, 8	5,6	10,8	9,6	$\sum_{i=1}^{4} x_i^2\,.P(X = x_i) = 26,8$

Media: $\alpha_1 = \mu_X = E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i\,.P(X = x_i) = 4,8$

$$\alpha_2 = E(X^2) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2\,.P(X = x_i) = 26,8$$

Varianza: $\sigma_X^2 = Var(X) = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 26,8 - 4,8^2 = 3,76$

Desviación típica: $\sigma_x = \sqrt{3,76} = 1,94$

Coeficiente variación: $CV = \dfrac{\sigma_x}{\mu_x} = \dfrac{1,94}{4,8} = 0,40$

Ejercicio 6.- La variable discreta X tiene como distribución de probabilidad

X	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,30	0,25	0,10	0,35

Se realiza un cambio de origen hacia la izquierda de dos unidades y un cambio de escala de 3 unidades.

Se pide:

a) Media y varianza de la X

b) Media, varianza y coeficiente de variación de la variable transformada por el cambio de origen

c) Media, varianza y coeficiente de variación de la variable transformada por el cambio de escala

d) Media, varianza y coeficiente de variación de la variable transformada por el cambio de origen y escala

Solución:

a)

$X = x_i$	$P(X = x_i) = p_i$	$x_i \cdot p_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot p_i$
$x_1 = 1$	0,30	0,30	1	0,30
$x_2 = 2$	0,25	0,50	4	1,00
$x_3 = 3$	0,10	0,30	9	0,90
$x_4 = 4$	0,35	1,40	16	5,60
	1	2,5		7,8

Media: $\alpha_1 = \mu_X = E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i . P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{4} x_i \, . \, p_i = 2,5$

$$\alpha_2 = E(X^2) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 . P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \, . \, p_i = 7,8$$

Varianza: $\sigma_x^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 7,8 - 2,5^2 = 1,55$

Desviación típica: $\sigma_X = \sqrt{1,55} = 1,245$

Coeficiente de variación: $CV_X = \dfrac{\sigma_X}{\mu_X} = \dfrac{1,245}{2,5} = 0,498$

b) Sea Y la variable transformada, al realizar un cambio de origen hacia la izquierda de dos unidades hay que restar 2, quedando: $Y = X - 0' = X - (-2) = X + 2$.

Media: $\mu_Y = E(Y) = E\left[X+2\right] = E(X+2) = E(X)+2 \quad \mapsto \quad \mu_Y = E(Y) = 2,5+2 = 4,5$

Varianza: $\sigma_Y^2 = Var\left[X+2\right] = Var(X) + Var(2) = \sigma_X^2 + 0 = \sigma_X^2 \quad \mapsto \quad \sigma_Y^2 = 1,55$

Desviación típica: $\sigma_Y = \sqrt{1,55} = 1,245$

Coeficiente de variación: $CV_Y = \dfrac{\sigma_Y}{\mu_Y} = \dfrac{\sigma_X}{\mu_X + 2} = \dfrac{1,245}{4,5} = 0,28 \neq CV_x$

En consecuencia, el cambio de origen afecta a la media y, en consecuencia, al coeficiente de variación.

c) Al realizar un cambio de escala de 3 unidades, la variable transformada es $Y = \dfrac{X}{3}$

Media: $\mu_Y = E(Y) = E\left[\dfrac{X}{3}\right] = \dfrac{1}{3}.\,E(X) \quad \mapsto \quad \mu_Y = \dfrac{1}{3}.\mu_X = \dfrac{2,5}{3}$

Varianza: $\sigma_Y^2 = Var\left[\dfrac{X}{3}\right] = \dfrac{1}{9}\,.Var(X) = \dfrac{1}{9}\,.\sigma_X^2 \quad \mapsto \quad \sigma_Y^2 = \dfrac{1}{9}\,.1,55 = \dfrac{1,55}{9}$

Desviación típica: $\sigma_Y = \sqrt{\dfrac{1,55}{9}} = \dfrac{1}{3}.\sqrt{1,55} = \dfrac{1}{3}.\sigma_X$

Coeficiente de variación: $CV_Y = \dfrac{\sigma_Y}{\mu_Y} = \dfrac{\dfrac{1}{3}.\sigma_X}{\dfrac{1}{3}.\mu_X} = \dfrac{\sigma_X}{\mu_X} = CV_X = 0,498$

El cambio de escala afecta a la media y a la desviación típica de la misma forma, en consecuencia deja invariante al coeficiente de variación.

Resultados que se observan en la tabla, donde $Y = \dfrac{X}{3}$

$Y = y_j$	$P(Y = y_j) = p_j$	$y_j\,.\,p_j$	y_j^2	$y_j^2\,.\,p_j$
$x_1 = 1/3$	0,30	0,1	$1/9$	$0,3/9$
$x_2 = 2/3$	0,25	$0,5/3$	$4/9$	$1/9$
$x_3 = 1$	0,10	0,1	1	0,1
$x_4 = 4/3$	0,35	$1,4/3$	$16/9$	$5,6/9$
	1	$2,5/3$		$7,8/9$

Media: $\alpha_1 = \mu_Y = E(Y) = \sum_{j=1}^{4} y_j.P(Y = y_j) = \sum_{j=1}^{4} y_j\,.\,p_j = \dfrac{2,5}{3} = \dfrac{1}{3}\,.\,\mu_X$

$$\alpha_2 = E(Y^2) = \sum_{j=1}^{4} y_j^2.P(Y = y_j) = \sum_{j=1}^{4} y_j^2\,.\,p_j = \dfrac{7,8}{9} = \dfrac{1}{9}\,.\,E(Y^2)$$

Varianza: $\sigma_Y^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \dfrac{7,8}{9} - \left(\dfrac{2,5}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9}\,.\,\sigma_X^2 = \dfrac{1,55}{9}$

Desviación típica: $\sigma_Y = \sqrt{\dfrac{1,55}{9}} = \dfrac{1}{3}.\sqrt{1,55} = \dfrac{1}{3}.\sigma_X$

Coeficiente de variación: $CV_Y = \dfrac{\sigma_Y}{\mu_Y} = \dfrac{\frac{1}{3}.\sigma_X}{\frac{1}{3}.\mu_X} = \dfrac{\sigma_X}{\mu_X} = CV_X = 0,498$

d) Al realizar simultáneamente un cambio de origen de 2 unidades a la izquierda y un cambio de escala de 3 unidades, la variable transformada es $Y = \dfrac{X+2}{3}$

Media: $\mu_Y = E(Y) = E\left[\dfrac{X+2}{3}\right] = \dfrac{1}{3}\,.\,E(X+2) = \dfrac{1}{3}.\,E(X) + \dfrac{2}{3}$

con lo que, $\mu_Y = E(Y) = \dfrac{1}{3}.\,E(X) + \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}\,.\,2,5 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{4,5}{3} = 1,5$

Varianza: $\sigma_Y^2 = Var(Y) = Var\left[\dfrac{X+2}{3}\right] = \dfrac{1}{9}\,.\,Var(X+2) = \dfrac{1}{9}.\,Var(X) = \dfrac{1}{9}.\,\sigma_X^2$

Desviación típica: $\sigma_Y = \sqrt{\dfrac{1,55}{9}} = \dfrac{1}{3}.\sqrt{1,55} = \dfrac{1}{3}.\sigma_X$

Coeficiente de variación: $CV_Y = \dfrac{\sigma_Y}{\mu_Y} = \dfrac{\frac{1}{3}.\sigma_X}{\frac{1}{3}.\mu_X + \frac{2}{3}} = \dfrac{\sigma_X}{\mu_X + 2} = \dfrac{1,245}{4,5} = 0,28 \neq CV_x$

El cambio de origen y de escala afecta a la media y desviación típica de distinta forma, en consecuencia también queda afectado el coeficiente de variación

.

Resultados que se observan en la tabla, donde $Y = \dfrac{X+2}{3}$

$Y = y_j$	$P(Y = y_j) = p_j$	$y_j\,.\,p_j$	y_j^2	$y_j^2\,.\,p_j$
$x_1 = 1$	0,30	0,30	1	0,30
$x_2 = 4/3$	0,25	1/3	16/9	4/9
$x_3 = 5/3$	0,10	0,5/3	25/9	2,5/9
$x_4 = 2$	0,35	0,70	4	1,4
	1	4,5/3		21,8/9

Media: $\alpha_1 = \mu_Y = E(Y) = \sum_{j=1}^{4} y_j \,.P(Y = y_j) = \sum_{j=1}^{4} y_j \,.\, p_j = \frac{4,5}{3} = 1,5$

$$\alpha_2 = E(Y^2) = \sum_{j=1}^{4} y_j^2 \,.P(Y = y_j) = \sum_{j=1}^{4} y_j^2 \,.\, p_j = \frac{21,8}{9}$$

Varianza: $\sigma_Y^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{21,8}{9} - \left(\frac{4,5}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \,.\, \sigma_X^2 = \frac{1,55}{9}$

Desviación típica: $\sigma_Y = \sqrt{\frac{1,55}{9}} = \frac{1}{3} . \sqrt{1,55} = \frac{1}{3} . \sigma_X$

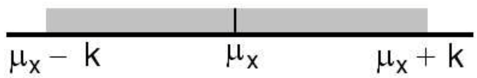
Coeficiente de variación: $CV_Y = \frac{\sigma_Y}{\mu_Y} = \frac{\frac{1}{3} \,.\, \sigma_X}{\frac{1}{3} \,.\, 4,5} = \frac{\sigma_X}{4,5} = \frac{1,245}{4,5} = 0,28 \neq CV_x$

Ejercicio 7.- En un cine de verano hay instaladas 800 sillas, sabiendo que el número de asistentes es una variable aleatoria de media 600 y desviación típica 100.
¿Qué probabilidad existe de que el número de personas que vaya al cine un día cualquiera sea superior al número de sillas instaladas?

Solución:

Sea la variable aleatoria X = "número de sillas del cine", donde $\mu = 600$, $\sigma = 100$

$P\left[X > 800\right] < P\left[\, |X - \mu_x| > k \,\right] \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$



$\mu_x + k = 800 \quad \mapsto \quad k = 800 - 600 = 200$

$P\left[X > 800\right] \leq \frac{100^2}{200^2} = \frac{1}{4} = 0,25$

Ejercicio 8.- La variable discreta X tiene como distribución de probabilidad

$$P(X=k)=\frac{1}{10} \quad \text{siendo} \quad k=2,3,\cdots,11$$

Se pide:

a) Función de distribución
b) $P(X>7)$
c) $P(X<5)$
d) $P(3\le X<7)$

Solución:

a) $F(x)=P(X\le x)=\dfrac{x-1}{10}$ siendo $x=2,3,\cdots,11$

Adviértase que entre dos valores consecutivos de la variable, la función de distribución toma el valor menor.

b) $P(X>7)=1-P(X\le 7)=1-F(7)=1-\dfrac{6}{10}=\dfrac{4}{10}=0,4$

o bien, $P(X>7)=P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)+P(X=11)=\dfrac{4}{10}=0,4$

c) $P(X<5)=F(5)=\dfrac{4}{10}=0,4$

o bien, $P(X<5)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=\dfrac{4}{10}=0,4$

d) $P(3\le X<7)=F(7)-F(3)=\dfrac{6}{10}-\dfrac{2}{10}=\dfrac{4}{10}=0,4$

o bien, $P(3\le X<7)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)=\dfrac{4}{10}=0,4$

Ejercicio 9.- Se desea conocer el número de automóviles que se deben poner a la venta durante un periodo determinado para que se satisfaga una demanda media de 300 unidades con una desviación típica de 100 unidades, con una probabilidad no inferior al 75%.

Solución:

Sea la variable aleatoria X = "número de automóviles a la venta"

$\mu=300$, $\sigma=100$

Según Chebyshev:

$$P\left[\,|X-\mu_x|\le k\,\right]\ge 1-\frac{\sigma^2}{k^2} \longrightarrow P\left[\,\mu_x-k\le X\le \mu_x+k\right]\ge 1-\frac{\sigma^2}{k^2}$$

$$P\left[\,300-k\ \le\ X\ \le 300+k\,\right]\ \ge\ \overbrace{1-\frac{100^2}{k^2}}^{0{,}75}$$

$$0{,}75=1-\frac{100^2}{k^2}\quad\mapsto\quad\frac{100^2}{k^2}=0{,}25\quad\mapsto\quad k^2=\frac{100^2}{0{,}25}\quad\mapsto\quad k=\sqrt{\frac{100^2}{0{,}25}}=200$$

$300+k=300+200=500$ automóviles

Ejercicio 10.- La demanda media de un producto es de 100 unidades con una desviación típica de 40 unidades. Calcular la cantidad del producto que se debe tener a la venta para satisfacer la demanda de forma que puedan ser atendidos al menos el 80% de los clientes.

Solución:

$\mu=100$, $\sigma=40$

Según Chebyshev:

$$P\left[\,\left|X-\mu_x\right|\ \le\ k\,\right]\ \ge\ 1-\frac{\sigma^2}{k^2}\quad\longrightarrow\quad P\left[\ \mu_x-k\ \le\ X\ \le\ \mu_x+\ k\right]\ \ge\ 1-\frac{\sigma^2}{k^2}$$

$$P\left[\ 100-k\ \le\ X\ \le\ \ 100+k\right]\ \ge\ \overbrace{1-\frac{40^2}{k^2}}^{0{,}80}$$

$$0{,}80=1-\frac{40^2}{k^2}\quad\mapsto\quad\frac{40^2}{k^2}=0{,}20\quad\mapsto\quad k^2=\frac{40^2}{0{,}20}\quad\mapsto\quad k=\sqrt{\frac{40^2}{0{,}20}}=89{,}44$$

Se deben poner a la venta 90 unidades.

Ejercicio 11.- La variable X ="número de centímetros a que un dardo queda del centro de la diana" al ser tirado por una persona tiene como función de densidad:

$$f(x)=\begin{cases} k & 0<x<10 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

Se pide:

a) Hallar k para que f(x) sea función de densidad. Representarla

b) Hallar la función de distribución. Representarla

c) Media, varianza y desviación típica

d) $P(X\leq 1)$

e) Probabilidad de acertar en la diana

Solución:

a) Para que f(x) sea función de densidad debe verificar:

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{10} f(x)\,dx+\int_{10}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{0}^{10} f(x)\,dx$$

la primera y tercera integral son cero al ser $f(x)=0$ en esos intervalos.

$$1=\int_{0}^{10} k\,dx=k\int_{0}^{10} dx=10\big[x\big]_0^{10}=10k \quad \mapsto \quad k=\frac{1}{10}$$

En consecuencia, $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{10} & 0<x<10 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$

b) La función de distribución se define $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

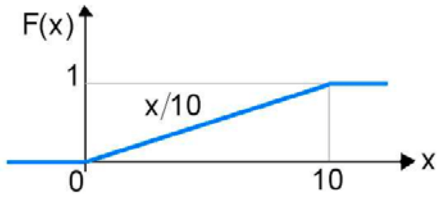
$x<0 \qquad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=0$

$0\leq x\leq 10 \qquad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt+\int_{0}^{x} f(t)\,dt=\int_{0}^{x}\frac{1}{10}\,dt=\frac{x}{10}$

$x>10 \qquad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt+\int_{0}^{10} f(t)\,dt+\int_{10}^{x} f(t)\,dt=\int_{0}^{10}\frac{1}{10}\,dt=1$

En consecuencia,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x}{10} & 0 \le x \le 10 \\ 1 & x > 10 \end{cases}$$



c) Media

$$\alpha_1 = \mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_0^{10} x\,.\frac{1}{10}.\, dx = \frac{1}{10}\int_0^{10} x\, dx = \frac{1}{10}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{10} = 5\,\text{cm}$$

Varianza: $\sigma_X^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$

$$\alpha_2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(x)\, dx = \int_0^{10} x^2\,.\frac{1}{10}.\, dx = \frac{1}{10}\int_0^{10} x^2\, dx = \frac{1}{10}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{10} = \frac{1}{10}\left[\frac{1000}{3} - 0\right] = \frac{100}{3}$$

$$\sigma_X^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{100}{3} - 5^2 = \frac{25}{3}\ \text{cm}^2$$

Desviación típica: $\sigma_X = \sqrt{\dfrac{25}{3}} = 2{,}9\ \text{cm}$

d) $P(X \le 1) = F(1) = \dfrac{1}{10}$

o también, $P(X \le 1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{10}\, dx = \frac{1}{10}\int_0^1 dx = \frac{1}{10}\,[x]_0^1 = \frac{1}{10}$

e) Probabilidad de acertar en la diana: $P(X = 0) = 0$ por ser una variable continua

$$P(X = 0) = \int_0^0 f(x)\, dx = \int_0^0 \frac{1}{10}\, dx = \frac{1}{10}\int_0^0 dx = 0$$

Ejercicio 12.- Se ha verificado que la variable X ="peso en kilos de los niños al nacer" es una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f(x)=\begin{cases} k\,x & 2\le x\le 4 \\ 0 & \text{en otros casos}\end{cases}$$

Se pide:

a) Hallar k para que f(x) sea función de densidad. Representarla

b) Hallar la función de distribución. Representarla

c) Media, varianza y desviación típica

d) Probabilidad de que un niño elegido al azar pese más de 3 kilos

e) Probabilidad de que pese entre 2 y 3,5 kilos

f) Qué debe pesar un niño para tener un peso igual o inferior al 90% de los niños

Solución:

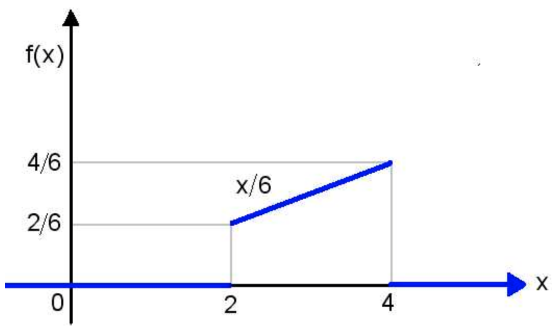
a) Para que f(x) sea función de densidad debe verificar:

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{2} f(x)\,dx+\int_{2}^{4} f(x)\,dx+\int_{4}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{2}^{4} f(x)\,dx$$

La primera y tercera integral son cero al ser $f(x)=0$ en esos intervalos.

$$1=\int_{2}^{4} f(x)\,dx=\int_{2}^{4} k\,x\,dx=k\int_{2}^{4} x\,dx=k\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4=k\left[\frac{16}{2}-\frac{4}{2}\right]=6k \quad\mapsto\quad k=\frac{1}{6}$$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{6} & 2\le x\le 4 \\ 0 & \text{en otros casos}\end{cases}$$



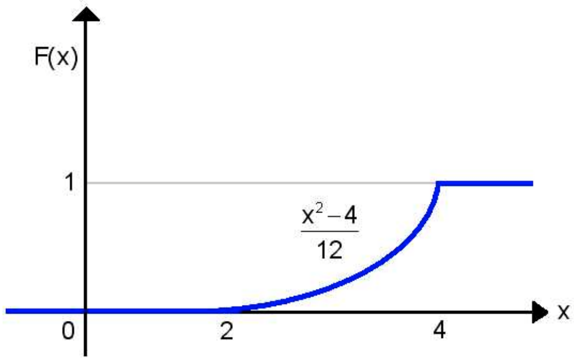
b) La función de distribución se define $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$x<2 \qquad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=0$

$2\le x\le 4 \qquad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{2}^{x} f(t)\,dt=\int_{2}^{x}\frac{t}{6}\,dt=\frac{1}{6}\left[\frac{t^2}{2}\right]_2^x=\frac{1}{6}\left[\frac{x^2-4}{2}\right]=\frac{x^2-4}{12}$

$x>4 \qquad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{2}^{4} f(t)\,dt+\int_{4}^{x} f(t)\,dt=\int_{2}^{4}\frac{t}{6}\,dt=\frac{1}{6}\left[\frac{t^2}{2}\right]_2^4=\frac{1}{6}\left[\frac{16-4}{2}\right]=1$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<2 \\ \dfrac{x^2-4}{12} & 2\le x\le 4 \\ 1 & x>4 \end{cases}$$



c) Media

$$\alpha_1=\mu_X=E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx=\int_2^4 x\,.\frac{x}{6}.\,dx=\frac{1}{6}\int_2^4 x^2\,dx=\frac{1}{6}\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^4=\frac{1}{6}\left[\frac{64}{3}-\frac{8}{3}\right]=\frac{56}{18}=3{,}1\text{ kilos}$$

Varianza: $\sigma_X^2=\alpha_2-\alpha_1^2$

$$\alpha_2=E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\,f(x)\,dx=\int_2^4 x^2\,.\frac{x}{6}.\,dx=\frac{1}{6}\int_2^4 x^3\,dx=\frac{1}{6}\left[\frac{x^4}{4}\right]_2^4=\frac{1}{6}\left[\frac{256}{4}-\frac{16}{4}\right]=10\text{ kilos}^2$$

$$\sigma_X^2=\alpha_2-\alpha_1^2=10-3{,}1^2=0{,}39\ \text{kilos}^2$$

Desviación típica: $\sigma_X=\sqrt{0{,}39}=0{,}62$ kilos

d) $P(X>3)=1-P(X\le 3)=1-F(3)=1-\dfrac{3^2-4}{12}=1-\dfrac{5}{12}=\dfrac{7}{12}=0{,}58$

o también, $P(X>3)=\displaystyle\int_3^4 f(x)\,dx=\int_3^4\frac{x}{6}dx=\frac{1}{6}\left[\frac{x^2}{2}\right]_3^4=\frac{1}{6}\left(8-\frac{9}{2}\right)=\frac{7}{12}=0{,}58$

e) $P(2\le X\le 3{,}5)=F(3{,}5)-F(2)=\dfrac{3{,}5^2-4}{12}-0=0{,}6875$

$$P(2\le X\le 3{,}5)=\int_2^{3{,}5} f(x)\,dx=\int_2^{3{,}5}\frac{x}{6}dx=\frac{1}{6}\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^{3{,}5}=\frac{1}{6}\left(\frac{12{,}25}{2}-\frac{4}{2}\right)=\frac{8{,}25}{12}=0{,}6875$$

f) Sea k el peso del niño, se tiene:

$$F(k)=P(X\le k)=0{,}9\ \longrightarrow\ \frac{k^2-4}{12}=0{,}9\ \Rightarrow\ k^2-4=10{,}8\ \Rightarrow\ k^2=14{,}8$$

$k=\sqrt{14{,}8}=3{,}85$, es decir, el niño debe pesar 3,85 kilos para tener para tener al 90% de los niños con un peso igual o inferior.

Ejercicio 13.- Gran número de fenómenos aeronáuticos tienen asociada una variable aleatoria con ley de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} k\,e^{-kx} & 0 < x < \infty \quad k > 0 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

Se pide:

a) ¿Puede tomar k cualquier valor?

b) Para $k = 0{,}1$ representar la función de densidad, la función de distribución y su gráfica

c) Siendo $k = 0{,}1$ hallar $P(X > 10)$

d) Para $k = 0{,}1$ calcular $P(50 < X \leq 100)$

Solución:

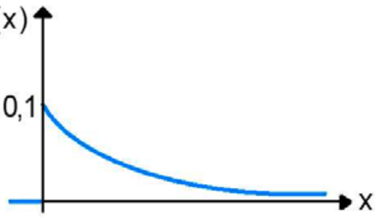
a) Para que f(x) sea función de densidad debe verificar:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} k\,e^{-kx}\,dx = -\int_{0}^{\infty} -k\,e^{-kx}\,dx = -\left[e^{-kx}\right]_0^{\infty} = -\left[\frac{1}{e^{kx}}\right]_0^{\infty} = 1$$

La función de densidad no depende del valor del parámetro k, pudiendo tomar éste cualquier valor positivo.

b) La función de densidad para $k = 0{,}1$ será:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}1\,.\,e^{-0{,}1\,x} & x > 0 \\ 0 & \text{otros casos} \end{cases}$$



La función de distribución se define $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

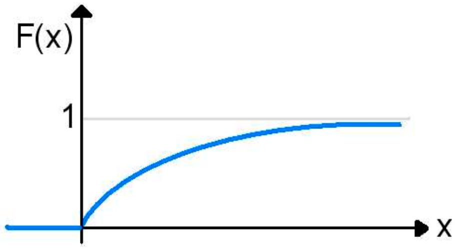
$x \leq 0 \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0$

$x > 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} 0{,}1\,.\,e^{-0{,}1t}\,dt = -\int_{0}^{x} -0{,}1\,.\,e^{-0{,}1t}\,dt =$$

$$= -\left[e^{-0{,}1t}\right]_0^{x} = -\left[\frac{1}{e^{0{,}1t}}\right]_0^{x} = -\left(\frac{1}{e^{0{,}1\,x}} - 1\right) = 1 - e^{-0{,}1\,x}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 - e^{-0,1\,x} & x > 0 \end{cases}$$



c) $P(X > 10) = 1 - P(X \le 10) = 1 - F(10) = 1 - \left(1 - e^{-0,1.10}\right) = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

d) $P(50 < X \le 100) = F(100) - F(50) = \left(1 - e^{-0,1.100}\right) - \left(1 - e^{-0,1.50}\right) = -e^{-10} + e^{-5} = \dfrac{1}{e^5} - \dfrac{1}{e^{10}}$

Ejercicio 14.- Una variable aleatoria continua X tiene por función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & 0 \le x < 1 \\ x - 1 & 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{otros casos} \end{cases}$$

Se pide:

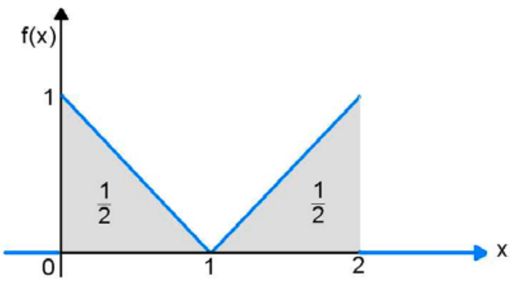
a) Representa la función de densidad

b) Hallar la función de distribución y su gráfica

c) $P(0 \le X \le 1)$ $\quad P(-2 \le X \le 2)$ $\quad P\left(\dfrac{1}{2} \le X < \infty\right)$

Solución:

a)



Se observa que el área encerrada es igual a la unidad

b) La función de distribución se define $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$x < 0$ $\qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0$

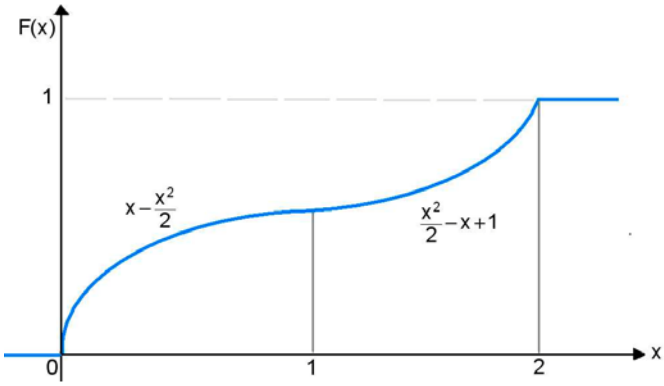
$0 \le x < 1$ $\qquad F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} (1-t)\,dt = \left[t - \dfrac{t^2}{2}\right]_0^x = x - \dfrac{x^2}{2}$

$1 \le x \le 2$ $\qquad F(x) = \cancel{\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt} + \int_{0}^{1} f(t)\,dt + \int_{1}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{1} (1-t)\,dt + \int_{1}^{x} (t-1)\,dt =$

$$= \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2} - t\right]_1^x = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right] = \frac{x^2}{2} - x + 1$$

$x > 2$ $$F(x) = \int_0^1 (1-t)\,dt + \int_1^2 (t-1)\,dt = \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2} - t\right]_1^2 = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x - \dfrac{x^2}{2} & 0 \le x < 1 \\ \dfrac{x^2}{2} - x + 1 & 1 \le x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$



c) $P(0 \le X \le 1)$ $P(-2 \le X \le 2)$ $P\left(\frac{1}{2} \le X < \infty\right)$

$$P(0 \le X \le 1) = F(1) - F(0) = \left(\frac{1}{2} - 1 + 1\right) - 0 = \frac{1}{2}$$

$$P(-2 \le X \le 2) = F(2) - F(-2) = \left(\frac{4}{2} - 2 + 1\right) - 0 = 1$$

$$P\left(\frac{1}{2} \le X < \infty\right) = F(\infty) - F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1/4}{2}\right) = \frac{5}{8}$$

Ejercicio 15.- Una variable aleatoria continua X tiene por función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x^2}{2} & 0 \le x \le 1 \\ 2x - \dfrac{x^2}{2} - 1 & 1 < x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

Se pide:

a) Hallar la función de distribución y representarla

b) Media, varianza, desviación típica y coeficiente de variación

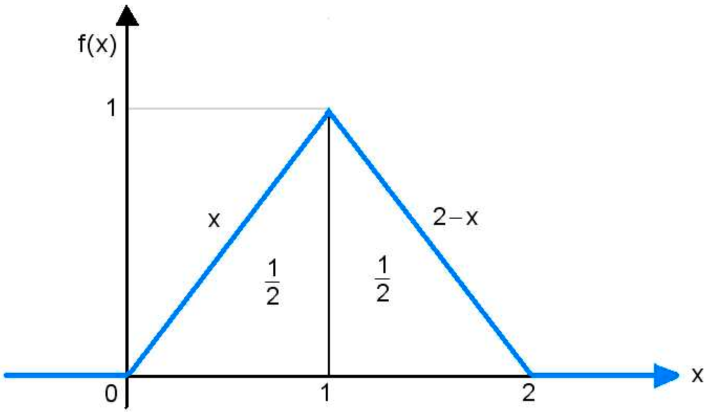
c) $P\left(\frac{1}{2} < X \le \frac{3}{2}\right)$

Solución:

a) La función de densidad es la derivada de la función de distribución en los puntos donde exista la derivada, entonces:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \le x \le 1 \\ 2-x & 1 < x \le 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1 \\ 2-x & 1 < x \le 2 \\ 0 & \text{otros valores} \end{cases}$$



b) Media

$$\alpha_1 = \mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_0^1 x.x.\, dx + \int_1^2 x.(2-x).\, dx = \int_0^1 x^2\, dx + \int_1^2 (2x - x^2).dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{3} + \left(4 - \frac{8}{3}\right) - \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 1$$

Varianza: $\sigma_X^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$

$$\alpha_2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(x)\, dx = \int_0^1 x^2.x.\, dx + \int_1^2 x^2.(2-x).\, dx = \int_0^1 x^3\, dx + \int_1^2 (2x^2 - x^3).dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4}\right]_o^1 + \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{16}{3} - \frac{16}{4}\right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$$

$$\sigma_X^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{7}{6} - 1^2 = \frac{1}{6}$$

Desviación típica: $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{6}} = 0,41$

Coeficiente variación: $CV_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} = \frac{0,41}{1} = 0,41$

c) $P\left(\frac{1}{2} < X \le \frac{3}{2}\right) = F\left(\frac{3}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \left(2.\frac{3}{2} - \frac{(3/2)^2}{2} - 1\right) - \left(\frac{(1/2)^2}{2}\right) = 3 - \frac{9}{8} - 1 - \frac{1}{8} = \frac{3}{4} = 0,75$

Ejercicio 16.- Una variable aleatoria continua X tiene por función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ x-1 & 1 \le x < 2 \\ 1 & x \ge 2 \end{cases}$$

a) Calcular la función de densidad o función de cuantía

b) Calcular la media, mediana y coeficiente de variación

Solución:

a) La función de densidad o función de cuantía es la derivada de la función de distribución en los puntos donde exista la derivada, entonces:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & 1 \le x < 2 \\ 0 & x \ge 2 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad f(x) = \begin{cases} 1 & 1 \le x < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

b) Media: $\alpha_1 = \mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_1^2 x\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$

• La Mediana de una distribución es el valor que deja el 50% de la distribución a la derecha y el otro 50% a la izquierda, por lo que:

$$\begin{cases} F(M_e) = 0,5 \quad \Rightarrow \quad M_e - 1 = 0,5 \quad \Rightarrow \quad M_e = 1,5 \\ \int_1^{M_e} f(x) = 0,5 \quad \Rightarrow \quad \int_1^{M_e} dx = 0,5 \quad \Rightarrow [x]_1^{M_e} = 0,5 \quad \Rightarrow \quad M_e - 1 = 0,5 \quad \Rightarrow \quad M_e = 1,5 \end{cases}$$

• Coeficiente de variación: $CV_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X}$

$$\alpha_2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(x)\, dx = \int_1^2 x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\sigma_X^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{7}{3} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{3} - \frac{9}{4} = \frac{1}{12} \quad \Rightarrow \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{12}} = 0,08$$

$$CV_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} = \frac{0,08}{1,5} = 0,05$$

Ejercicio 17.- La función de densidad de una variable aleatoria es:

$$f(x)=\begin{cases} a\,x^2+b & 0<x<2 \\ 0 & \text{en el resto}\end{cases} \qquad \text{sabiendo que } P\left[\frac{1}{2}<x<1\right]=0{,}1666\,.$$

Determinar a y b.

Solución:

Hay que calcular dos parámetros (a y b), por lo que se necesitan dos ecuaciones:

- Por ser función de densidad:

$$1=\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 (a\,x^2+b)\,dx=\left[a\frac{x^3}{3}+b\,x\right]_0^2=\frac{8\,a}{3}+2b \quad \mapsto \quad 8\,a+6\,b=3$$

- $P\left[\frac{1}{2}\le x\le 1\right]=\int_{1/2}^1 f(x)\,dx=\int_{1/2}^1 (a\,x^2+b)\,dx=\left[a\frac{x^3}{3}+b\,x\right]_{1/2}^1=0{,}1666$, con lo que:

$$\left[a\frac{x^3}{3}+b\,x\right]_{1/2}^1=\left[\frac{a}{3}+b\right]-\left[\frac{a}{24}+\frac{b}{2}\right]=\frac{7a}{24}+\frac{b}{2}=0{,}1666 \quad \mapsto \quad 7a+12\,b\approx 4$$

en consecuencia,

$$\left.\begin{array}{r}8\,a+6\,b=3\\ 7a+12\,b=4\end{array}\right\} \;\mapsto\; \left.\begin{array}{r}16\,a+12\,b=6\\ 7a+12\,b=4\end{array}\right\} \;\rightarrow\; \boxed{a=\frac{2}{9}=0{,}22} \quad 6\,b=3-\frac{16}{9}=\frac{11}{9} \;\mapsto\; \boxed{b=\frac{11}{54}=0{,}20}$$

Ejercicio 18.- La función de distribución asociada a la producción de una máquina, en miles de unidades, es del tipo:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ x\,(2-x) & 0\le x\le k \\ 1 & x>k \end{cases}$$

a) Determinar k para que sea función de distribución

b) Hallar la función de densidad

c) Calcular la media, mediana. moda y varianza de la producción

d) Hallar $P(X<0{,}5)$ y $P(X>0{,}25)$

e) Función de densidad y de distribución de la variable aleatoria continua $Y=6\,X-3$

Solución:

a) Para que sea función de distribución se debe verificar:

$$1=\lim_{x\to k^+}F(x)=\lim_{x\to k^-}F(x)\quad\mapsto\quad \lim_{x\to k^-}x\,(x-2)=k\,(k-2)=1\quad\mapsto\quad k^2-2k+1=0\quad\Rightarrow\quad k=1$$

En consecuencia, la función de distribución es: $F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ x\,(2-x) & 0\le x\le 1 \\ 1 & x>1 \end{cases}$

b) La función de densidad o función de cuantía es la derivada de la función de distribución en los puntos donde exista la derivada.

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 2-2x & 0\le x\le 1 \\ 0 & x>1 \end{cases}\quad\longrightarrow\quad f(x)=\begin{cases} 2-2x & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

c) Media:

$$\alpha_1=\mu_X=E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\,f(x)\,dx=\int_0^1 x\,(2-2x)\,dx=\int_0^1(2x-2x^2)\,dx=\left[x^2-\frac{2x^3}{3}\right]_0^1=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

• Para calcular la Moda hay que ver el valor que hace mínima la función de densidad o de cuantía, es decir:

$$f(x)=\begin{cases} 2-2x & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}\quad\mapsto\quad f'(x)=\begin{cases} -2 & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La derivada de la función de cuantía $f'(x)=-2<0$, por lo que se trata de una función decreciente y toma el valor máximo en el extremo superior del intervalo $[0,1]$, por tanto la moda $M_d=0$

• La Mediana de una distribución es el valor que deja el 50% de la distribución a la derecha y el otro 50% a la izquierda, por lo que:

$$F(M_e)=0,5 \quad \Rightarrow \quad M_e\left(2-M_e\right)=0,5 \quad \Rightarrow \quad M_e^2-2M_e+0,5=0 \quad \Rightarrow \quad 2M_e^2-4M_e+1=0$$

$$2M_e^2-4M_e+1=0 \quad \mapsto \quad M_e=\frac{4\pm\sqrt{16-8}}{4}=\frac{4\pm 2\sqrt{2}}{4}=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

De las dos soluciones se rechaza aquella que es mayor que 1, por lo que la Mediana es:

$$M_e==1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

• La Varianza de la producción: $\sigma_X^2=\alpha_2-\alpha_1^2$

$$\alpha_2=E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\,f(x)\,dx=\int_0^1 x^2\,(2-2\,x)dx \;=\left[\frac{2\,x^3}{3}-\frac{x^4}{2}\right]_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

$$\sigma_X^2=\alpha_2-\alpha_1^2=\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{18}$$

d) Función de distribución $F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ x\,(2-x) & 0\le x\le 1 \\ 1 & x>1 \end{cases}$

$$P(X<0,5)=P(X\le 0,5)=F(0,5)=0,5\,(2-0,5)=0,75$$

$$P(X>0,25)=1-P(X\le 0,25)=1-F(0,25)=1-0,25\,(2-0,25)=0,5625$$

También mediante la función de cuantía: $f(x)=\begin{cases} 2-2\,x & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

$$P(X<0,5)=\int_0^{0,5}f(x)\,dx=\int_0^{0,5}(2-2\,x)\,dx=\left[2\,x-x^2\right]_0^{0,5}=1-0,25=0,75$$

$$P(X>0,25)=\int_{0,25}^{1}f(x)\,dx=\int_{0,25}^{1}(2-2\,x)\,dx=\left[2\,x-x^2\right]_{0,25}^{1}=1-(0,5-0,0625)=0,5625$$

e) Función de densidad de $Y=6\,X-3$

Fórmula del cambio de variable en la función de densidad: $g(y)=f(x).\left|\frac{dx}{dy}\right|$

$$x=\frac{y+3}{6} \quad \mapsto \quad \left|\frac{dx}{dy}\right| = \left|\frac{d}{dy}\left(\frac{y+3}{6}\right)\right| = \frac{1}{6}$$

Dominio de definición de la nueva variable Y: $Y = 6\,X - 3 \begin{cases} x=0 & \mapsto \; y=-3 \\ x=1 & \mapsto \; y=3 \end{cases}$

resultando:

$$g(y) = f(x).\left|\frac{dx}{dy}\right| = \begin{cases} \left[2-2\left(\dfrac{y+3}{6}\right)\right].\dfrac{1}{6} & -3 \le y \le 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \longrightarrow \; g(y) = \begin{cases} \dfrac{3-y}{18} & -3 \le y \le 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Función de distribución:

$$F(y) = \begin{cases} 0 & y < -3 \\ \displaystyle\int_{-3}^{y} \frac{1}{18}\,(3-t)\,dt & -3 \le y < 3 \\ 1 & y \ge 3 \end{cases} \quad \mapsto \quad F(y) = \begin{cases} 0 & y < -3 \\ \dfrac{-y^2+6\,y+27}{36} & -3 \le y < 3 \\ 1 & y \ge 3 \end{cases}$$

Ejercicio 19.- Dada la función $f(x) = e^{-2x}$

a) Comprobar si puede ser función de densidad de una variable aleatoria X cuando su campo de variación es el intervalo $x \ge 0$

b) En caso de que no lo pueda ser, qué modificaciones habría que introducir para que lo fuera.

Solución:

a) Para que sea función de densidad, debe cumplir dos condiciones en el campo de variación de la variable aleatoria:

- $f(x)$ no puede ser negativa
- La integral de $f(x)$ en el campo de variación es 1

- $f(x) = e^{-2x} \ge 0 \quad \mapsto \quad L\,e^{-2x} \ge L\,0 \quad \Rightarrow \quad -2x > -\infty \quad \Rightarrow \quad x < \infty$ es positiva

- $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-2x}\,dx = \left[-\frac{1}{2}\,e^{-2x}\right]_0^{\infty} = \left[0 + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2} \ne 1$. No se cumple, luego la función dada no es de densidad en el intervalo.

b) Para que sea función de densidad, se define $f(x) = k\;e^{-2x}$

$$\int_0^{\infty} k\,e^{-2x}\,dx = k\int_0^{\infty} e^{-2x}\,dx = k\left[-\frac{1}{2}\,e^{-2x}\right]_0^{\infty} = \frac{k}{2} = 1 \mapsto k = 2$$

En consecuencia, $f(x) = 2\;e^{-2x}$

Ejercicio 20.- Dada la variable aleatoria continua X con función de densidad:

$$f(x)=\begin{cases} k\,(x+2) & 0\le x\le 4 \\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

Hallar:

a) El valor de k para que sea realmente una función de densidad

b) La función de distribución

c) La varianza

d) $P(2\le X\le 3)$

Solución:

a) $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx=1 \;\mapsto\; \int_0^4 k\,(x+2)\,dx=k\int_0^4 (x+2)\,dx=k\left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^4 = 16k = 1 \Rightarrow k=\frac{1}{16}$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{16}(x+2) & 0\le x\le 4 \\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

b) Función de distribución: $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$, en este caso:

$x<0 \qquad F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{x} 0\,dt=0$

$0\le x<4 \qquad F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{x} 0\,dt+\int_0^x \frac{1}{16}(t+2)\,dt=\frac{1}{16}\int_0^x (t+2)\,dt=\frac{1}{16}\left[\frac{t^2}{2}+2t\right]_0^x=$

$$=\frac{x^2+4x}{32}$$

$x\ge 4 \qquad F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{x} 0\,dt+\int_0^4 \frac{1}{16}(t+2)\,dt+\int_4^x 0\,dt=\frac{1}{16}\left[\frac{t^2}{2}+2t\right]_0^4=1$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \dfrac{x^2+4x}{32} & 0\le x<4 \\ 1 & x\ge 4\end{cases}$$

c) Para calcular la varianza: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{16}(x+2) & 0\le x\le 4\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$

$$\alpha_1=\mu=E\left[X\right]=\int_0^4 x\,f(x)\,dx=\int_0^4 x\left[\frac{1}{16}(x+2)\right]dx=\frac{1}{16}\int_0^4 (x^2+2x)\,dx=\frac{1}{16}\left[\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^4=$$

$$=\frac{1}{16}\left[\frac{112}{3}\right]=\frac{7}{3}$$

$$\alpha_2=E\left[X^2\right]=\int_0^4 x^2\,f(x)\,dx=\int_0^4 x^2\left[\frac{1}{16}(x+2)\right]dx=\frac{1}{16}\int_0^4 (x^3+2x^2)\,dx=\frac{1}{16}\left[\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}\right]_0^4=$$

$$=\frac{1}{16}\left[64+\frac{128}{3}\right]=\frac{20}{3}$$

$$\sigma_X^2=\text{Var}(X)=\alpha_2-\left(\alpha_1\right)^2 \quad\Rightarrow\quad \sigma_X^2=\frac{20}{3}-\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{11}{9}$$

d) $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{x^2+4x}{32} & 0\le x<4\\ 1 & x\ge 4\end{cases}$ $\qquad f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{16}(x+2) & 0\le x\le 4\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$

$$P(2\le X\le 3)=F(3)-F(2)=\left(\frac{9+12}{32}\right)-\left(\frac{4+8}{32}\right)=\frac{21-12}{32}=\frac{9}{32}$$

$$P(2\le X\le 3)=\int_2^3 \frac{1}{16}(x+2)\,dx=\frac{1}{16}\left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_2^3=\frac{1}{16}\,\frac{9}{2}=\frac{9}{32}$$

Ejercicio 21.- La función de densidad asociada al tráfico aéreo es del tipo:

$$f(x)=\begin{cases} 2(x-1) & 1<x<2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Considerando la variable aleatoria continua $Y=\dfrac{X+3}{5}$

a) Obtener la función de densidad de la variable Y

b) Media y varianza de la variable Y

Solución:

a) $$Y=\frac{X+3}{5} \quad\Rightarrow\quad X=5Y-3 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dy}=5 \\ x=1 \;\mapsto\; y=4/5=0,8 \\ x=2 \;\mapsto\; y=1 \end{cases}$$

donde $g(x)=\dfrac{x+3}{5} \quad\mapsto\quad x=5y-3 \quad\mapsto\quad g^{-1}(y)=5y-3$

La función de densidad de la variable continua Y se obtiene:

$$g(y)=f_X\left[g^{-1}(y)\right].\left|\frac{dx}{dy}\right|=\begin{cases} 2\left[(5y-3)-1\right].5 & 0,8<y<1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} 50y-40 & 0,8<y<1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} 2(x-1) & 1<x<2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \qquad\qquad g(y)=\begin{cases} 50y-40 & 0,8<y<1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

- Media y varianza de la variable aleatoria continua X:

$$\alpha_1=\mu_X=E\left[X\right]=\int_1^2 x\,f(x)\,dx=\int_1^2 x\left[2(x-1)\right]dx=\int_1^2 (2x^2-2x)\,dx=\left[\frac{2x^3}{3}-x^2\right]_1^2=$$

$$=\left[\frac{16}{3}-4\right]-\left[\frac{2}{3}-1\right]=\frac{5}{3}$$

$$\alpha_2=E\left[X^2\right]=\int_1^2 x^2\,f(x)\,dx=\int_1^2 x^2\left[2(x-1)\right]dx=\int_1^2 (2x^3-2x^2)\,dx=\left[\frac{x^4}{2}-\frac{2x^3}{3}\right]_1^2=$$

$$=\left[8-\frac{16}{3}\right]-\left[\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right]=\frac{17}{6}$$

$$\sigma_X^2=Var(X)=\alpha_2-\alpha_1^2 \quad\Rightarrow\quad \sigma_X^2=\frac{17}{6}-\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{1}{18}$$

- Media y varianza de la variable aleatoria continua Y:

$$\alpha_1 = \mu_Y = E\left[Y\right] = \int_{0,8}^{1} y\, f(y)\, dy = \int_{0,8}^{1} y\left[50\,y - 40\right] dy = \int_{0,8}^{1} (50\,y^2 - 40\,y)\, dy =$$

$$= \left[\frac{50\,y^3}{3} - 20\,y^2\right]_{0,8}^{1} = \frac{14}{15}$$

$$\alpha_2 = E\left[Y^2\right] = \int_{0,8}^{1} y^2\, f(y)\, dy = \int_{0,8}^{1} y^2\left[50\,y - 40\right] dy = \int_{0,8}^{1} (50\,y^3 - 40\,y^2)\, dy =$$

$$= \left[\frac{50\,y^4}{4} - \frac{40\,y^3}{3}\right]_{0,8}^{1} = \frac{131}{150}$$

$$\sigma_Y^2 = \text{Var}(Y) = \alpha_2 - \alpha_1^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_Y^2 = \frac{131}{150} - \left(\frac{14}{15}\right)^2 = \frac{1}{450}$$

La media y varianza de la variable aleatoria continua Y se podían haber realizado considerando las propiedades de la media y varianza de la variable aleatoria X, es decir:

Ejercicio 22.- La demanda diaria de un determinado artículo es una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{8} & 0<x\le 4\\[2mm] \dfrac{12-x}{64} & 4<x\le 12\\[2mm] 0 & \text{otro caso}\end{cases}$$

Los beneficios diarios dependen de la demanda según la siguiente función:

$$B=\begin{cases}-5 & \text{si} \quad x<2\\ 5 & \text{si} \quad 2<x\le 4\\ 10 & \text{si} \quad 4<x\le 8\\ 15 & \text{si} \quad 8<x\le 12\end{cases}$$

Calcular:

a) Probabilidad de que en un día cualquiera la demanda sea superior a 10
b) Probabilidad de que la demanda sea inferior a 3
c) La esperanza y la varianza de la demanda
d) Función de distribución de la demanda
e) Función de cuantía y función de distribución de la variable aleatoria beneficios diarios.
f) Esperanza y varianza de la variable beneficios

Solución:

a) $P(X>10)=\displaystyle\int_{10}^{12} f(x)\,dx=\int_{10}^{12}\frac{12-x}{64}\,dx=\frac{1}{64}\left[12x-\frac{x^2}{2}\right]_{10}^{12}=\frac{1}{32}=0{,}03125$

b) $P(X<3)=\displaystyle\int_{0}^{3} f(x)\,dx=\int_{0}^{3}\frac{1}{8}\,dx=\frac{1}{8}\left[x\right]_0^3=\frac{3}{8}=0{,}375$

c) Media o Esperanza

$$\alpha_1=\mu_x=E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x.f(x)\,dx=\int_0^4 x.f(x)\,dx+\int_4^{12}x.f(x)\,dx=\int_0^4 x.\frac{1}{8}\,dx+\int_4^{12}x.\frac{12-x}{64}\,dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^4 x\,dx+\frac{1}{64}\int_4^{12}(12x-x^2)\,dx=\frac{1}{16}\left[x^2\right]_0^4+\frac{1}{64}\left[6x^2-\frac{x^3}{3}\right]_4^{12}=$$

$$=1+\frac{1}{64}\left(864-\frac{1728}{3}-96+\frac{64}{3}\right)=\frac{13}{3}=4{,}33$$

Varianza:

$$\alpha_2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 . f(x)\, dx = \int_0^4 x^2 . f(x)\, dx + \int_4^{12} x^2 . f(x)\, dx = \int_0^4 x^2 . \frac{1}{8}\, dx + \int_4^{12} x^2 . \frac{12-x}{64}\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^4 x^2\, dx + \frac{1}{64}\int_4^{12} (12x^2 - x^3)\, dx = \frac{1}{24}\left[x^3\right]_0^4 + \frac{1}{64}\left[4x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_4^{12} =$$

$$= \frac{64}{24} + \frac{1}{64}\left(6912 - 5184 - 256 + 64\right) = \frac{5120}{192} = \frac{80}{3} = 26,67$$

$$\sigma_x^2 = Var(X) = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{80}{3} - \left(\frac{13}{3}\right)^2 = \frac{71}{9} = 7,89$$

d) La función de distribución de la demanda $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$

$$F(x) = \begin{cases} \text{si } x < 0 & \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{x} 0\, dx = 0 \\ \text{si } 0 \le x < 4 & \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_0^x \frac{1}{8}\, dx = \frac{x}{8} \\ \text{si } 4 \le x < 12 & \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx = \int_0^4 \frac{1}{8}\, dx + \int_4^x \frac{12-x}{64}\, dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{64}\left(-\frac{x^2}{2} + 12x - 40\right) \\ \text{si } x \ge 12 & \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_0^4 \frac{1}{8}\, dx + \int_4^{12} \frac{12-x}{64}\, dx + \int_{12}^{x} 0\, dx = 1 \end{cases}$$

En resumen,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ \ x < 0 \\ \dfrac{x}{8} & si\ \ 0 \le x < 4 \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{64}\left(-\dfrac{x^2}{2} + 12x - 40\right) & si\ \ 4 \le x < 12 \\ 1 & si\ \ x \ge 12 \end{cases}$$

e) La función de cuantía y la función de distribución de la variable aleatoria beneficios diarios se hallan considerando:

$$B = \begin{cases} -5 & \text{si} & x < 2 \\ 5 & \text{si} & 2 < x \le 4 \\ 10 & \text{si} & 4 < x \le 8 \\ 15 & \text{si} & 8 < x \le 12 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{8} & 0 < x \le 4 \\ \dfrac{12-x}{64} & 4 < x \le 12 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Función de cuantía o probabilidad:

b_i	$P[B=b_i]$
-5	$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{1}{8}\,dx = \frac{1}{4} = 0{,}25$
5	$\int_2^4 f(x)\,dx = \int_2^4 \frac{1}{8}\,dx = \frac{1}{4} = 0{,}25$
10	$\int_4^8 f(x)\,dx = \int_4^8 \frac{12-x}{64}\,dx = \frac{1}{64}\left(12x - \frac{x^2}{2}\right)_4^8 = 0{,}375$
15	$\int_8^{12} f(x)\,dx = \int_8^{12} \frac{12-x}{64}\,dx = \frac{1}{64}\left(12x - \frac{x^2}{2}\right)_8^{12} = 0{,}125$

Función de distribución $F(B) = P(B \le b_i)$

b_i	$P(B=b_i)$	$F(B)=P(B\le b_i)$	$b_i \,.\, P[B=b_i]$	$b_i^2 \,.\, P[B=b_i]$
-5	0,25	0,25	-1,25	6,25
5	0,25	0,50	1,25	6,25
10	0,375	0,875	3,75	37,5
15	0,125	1	1,875	28,125
			$\sum_{i=1}^{4} b_i \,.\, P[B=b_i] = 5{,}625$	$\sum_{i=1}^{4} b_i^2 \,.\, P[B=b_i] = 78{,}125$

f) Media o Esperanza beneficios: $\mu_b = E(B) = \sum_{i=1}^{4} b_i \,.\, P[B=b_i] = 5{,}625$

Varianza beneficios:

$$E\left[B^2\right] = \sum_{i=1}^{4} b_i^2 \,.\, P[B=b_i] = 78{,}125$$

$$\sigma_b^2 = \mathrm{Var}(B) = E(B^2) - \mu_b^2 = 78{,}125 - (5{,}625)^2 = 46{,}48$$

Desviación típica de los beneficios: $\sigma_b = \sqrt{46{,}48} = 6{,}817$

`

Ejercicio 23.- Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad tal que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{8}{7\,x^2} & 1 \le x \le 8 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

a) Calcular el primer y tercer cuartil, el decil 7 y el percentil 85

b) Calcular la mediana y moda

Solución:

a) La Función de distribución:

$$F(x) = P\left[X \le x\right] = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{1}^{x} \frac{8}{7\,t^2}\,dt = -\frac{8}{7}\left[\frac{1}{t}\right]_1^x = \frac{8\,(x-1)}{7\,x} \qquad 1 \le x \le 8$$

sustituyendo, queda:

$$F(Q_1) = \frac{1}{4} = \frac{8\,(Q_1 - 1)}{7\,Q_1} \quad \mapsto \quad 7\,Q_1 = 32\,(Q_1 - 1) \quad \mapsto \quad Q_1 = \frac{32}{25} = 1{,}28 \qquad \boxed{Q_1 = P_{25} = 1{,}28}$$

$$F(Q_3) = \frac{3}{4} = \frac{8\,(Q_3 - 1)}{7\,Q_3} \quad \mapsto \quad 21Q_3 = 32\,(Q_3 - 1) \quad \mapsto \quad Q_3 = \frac{32}{11} = 2{,}91 \qquad \boxed{Q_3 = D_5 = P_{75} = 2{,}91}$$

$$F(D_7) = \frac{7}{10} = \frac{8\,(D_7 - 1)}{7\,D_7} \quad \mapsto \quad 49\,D_7 = 80\,(D_7 - 1) \quad \mapsto \quad D_7 = \frac{80}{31} = 2{,}58$$

$$F(P_{85}) = \frac{85}{100} = \frac{8\,(P_{85} - 1)}{7\,P_{85}} \quad \mapsto \quad 595\,P_{85} = 800\,(P_{85} - 1) \quad \mapsto \quad P_{85} = \frac{800}{205} = 3{,}90$$

b) $M_e = Q_2 = D_5 = P_{50}$

$$F(M_e) = \frac{1}{2} = \frac{8\,(M_e - 1)}{7\,M_e} \quad \mapsto \quad 7\,M_e = 16\,(M_e - 1) \quad \mapsto \quad M_e = \frac{16}{9} = 1{,}78$$

La Moda M_d se obtiene calculando el máximo de la función de densidad:

$$f(x) = \frac{8}{7\,x^2} \quad \mapsto \quad f'(x) = -\frac{16}{7\,x^3} < 0 \quad \mapsto \quad \text{La función es decreciente}$$

De forma que $f(1) \ge f(x) \ge f(8)$, con lo que $M_d = 1$

Ejercicio 24.- Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad tal que

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

a) Función generatriz de los momentos (f.g.m.)

b) Esperanza y varianza a partir de la f.g.m.

c) Función característica

Solución:

a) $M(t) = E\left[e^{tx}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} . f(x). dx = \int_{0}^{\infty} e^{x(t-1)} \, dx = \frac{1}{t-1}\left[e^{x(t-1)}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{1-t}$ si $t < 1$

b) $\alpha_1 = E(X) = M^{(1)}(0) = \left.\frac{dM(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{1-t}\right]\right|_{t=0} = \left.\frac{1}{(1-t)^2}\right|_{t=0} = 1$

$$\alpha_2 = E(X^2) = M^{(2)}(0) = \left.\frac{d^2 M(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-t}\right)\right]\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{(1-t)^2}\right)\right|_{t=0} = \left.\frac{2}{(1-t)^3}\right|_{t=0} = 2$$

$$\text{Var}(X) = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 2 - 1 = 1$$

c) La función característica se puede calcular utilizando la relación entre función característica y los momentos:

$$\varphi(t) = 1 + (it)\,\alpha_1 + \frac{(it)^2}{2!}\alpha_2 + \frac{(it)^3}{3!}\alpha_3 + \cdots + \frac{(it)^k}{k!}\alpha_k + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(it)^j}{j!}\alpha_j \quad \text{si } t < 1$$

Ejercicio 25.- Sea X una variable aleatoria continua, cuya función de densidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} 3\,x^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sea $Y = 1 - X^2$ una transformación de la v.a. X

a) Calcular la función de densidad de la v.a. Y

b) Calcular la función de distribución de la v.a. Y

Solución:

a) La transformación asociada a la v.a. Y es derivable y estrictamente monótona cuando X toma valores en el intervalo (0, 1). En consecuencia, se puede aplicar la transformación, quedando la función de densidad:

$$Y = 1 - X^2 \quad \mapsto \quad x = \sqrt{1-y} \quad \mapsto \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{-1}{2\sqrt{1-y}} \\ g^{-1}(y) = \sqrt{1-y} \end{cases}$$

La función de densidad de la variable continua Y se obtiene:

$$f_Y(y) = f_X\left[g^{-1}(y)\right] . \left|\frac{dx}{dy}\right| = 3\left(\sqrt{1-y}\right)^2 \left|\frac{-1}{2\sqrt{1-y}}\right| = \frac{3}{2}\sqrt{1-y}$$

La función de densidad de la v.a. Y: $\quad f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}\sqrt{1-y} & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

b) Función de distribución:

$$y \leq 0 \;\mapsto\; F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)\,dt = 0$$

$$0 < y < 1 \;\mapsto\; F_Y(y) = \cancel{\int_{-\infty}^{0} f(y)\,dy} + \int_0^y f(t)\,dt = \int_0^y \frac{3}{2}\sqrt{1-t}\,dt = \left[-\sqrt{(1-t)^3}\,\right]_0^y = 1 - \sqrt{(1-y)^3}$$

$$y \geq 1 \;\mapsto\; F_Y(y) = \cancel{\int_{-\infty}^{0} f(y)\,dy} + \int_0^1 f(t)\,dt + \cancel{\int_1^y f(t)\,dt} = \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{3}{2}\sqrt{1-t}\,dt = 1$$

La función de distribución de la v.a. Y será: $\quad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 1 - \sqrt{(1-y)^3} & 0 < y < 1 \\ 1 & y \geq 1 \end{cases}$

Ejercicio 26.- Sea X una variable aleatoria continua, cuya función de densidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sea $Y = X^2$ una transformación de la v.a. X

a) Calcular la función de densidad de la v.a. Y

b) Calcular la función de distribución de la v.a. Y

Solución:

La transformación $Y = X^2$ es derivable, pero no es estrictamente monótona, puesto que en el intervalo (-1, 0) la transformación es decreciente y en el intervalo [0, 1) es creciente.

En este caso, hay que determinar la función de distribución de la variable aleatoria Y para el caso general de las transformaciones de una variable aleatoria, ya que no se puede aplicar el método descrito en el ejercicio 25.

b) Cálculo de la función de distribución

$$F_Y(y) = P\left[Y \le y\right] = P\left[X^2 \le y\right] = P\left[|X| \le \sqrt{y}\right] = P\left[-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}\right] = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\right]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} = \sqrt{y}$$

La función de distribución de la v.a. Y es: $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \sqrt{y} & 0 \le y < 1 \\ 1 & y \ge 1 \end{cases}$

a) La función de densidad $f_Y(y) = \dfrac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}} & 0 \le y < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Portal Fuenterrebollo