

INSTRUCCIONES Y CRITERIOS GENERALES DE CALIFICACIÓN

INSTRUCCIONES: El alumno deberá elegir una de las dos opciones A o B que figuran en el presente examen y contestar razonadamente a los cuatro ejercicios de los que consta la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.

CALIFICACIÓN: La puntuación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

TIEMPO: Una hora y treinta minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 3 puntos)

Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x + ay - 7z = 4a - 1 \\ x + (1 + a)y - (a + 6)z = 3a + 1 \\ ay - 6z = 3a - 2. \end{cases}$$

- Discútase el sistema según los diferentes valores de a .
- Resuélvase el sistema en el caso en el que tiene infinitas soluciones.
- Resuélvase el sistema en el caso $a = -3$.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 3 puntos)

Una empresa vinícola tiene plantadas 1200 cepas de vid en una finca, produciendo cada cepa una media de 16 kg de uva. Existe un estudio previo que garantiza que por cada cepa que se añade a la finca, las cepas producen de media 0,01 kg menos de uva cada una. Determínese el número de cepas que se deben añadir a las existentes para que la producción de uvas de la finca sea máxima.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

En un tribunal de la prueba de acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de grado se han examinado 80 alumnos del colegio A, 70 alumnos del colegio B y 50 alumnos del colegio C. La prueba ha sido superada por el 80 % de los alumnos del colegio A, el 90 % de los del colegio B y por el 82 % de los del colegio C.

- ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido al azar haya superado la prueba?
- Un alumno elegido al azar no ha superado la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al colegio B?

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se supone que el peso en kilogramos de los alumnos de un colegio de Educación Primaria el primer día del curso se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 2,8 kg. Una muestra aleatoria simple de 8 alumnos de ese colegio proporciona los siguientes resultados (en kg):

26 27,5 31 28 25,5 30,5 32 31,5.

- Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 90 % para el peso medio de los alumnos de ese colegio el primer día de curso.
- Determínese el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea menor o igual que 0,9 kg con un nivel de confianza del 97 %.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 3 puntos)

Un estadio de fútbol con capacidad para 72000 espectadores está lleno durante la celebración de un partido entre los equipos A y B. Unos espectadores son socios del equipo A, otros lo son del equipo B, y el resto no son socios de ninguno de los equipos que están jugando. A través de la venta de localidades sabemos lo siguiente:

- (a) No hay espectadores que sean socios de ambos equipos simultáneamente.
- (b) Por cada 13 socios de alguno de los dos equipos hay 3 espectadores que no son socios.
- (c) Los socios del equipo B superan en 6500 a los socios del equipo A.

¿Cuántos socios de cada equipo hay en el estadio viendo el partido?

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 3 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

- (a) Estúdiese la continuidad y la derivabilidad de la función f .
- (b) Representétese gráficamente la función f .
- (c) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f , el eje OX , el eje OY y la recta $x = 2$.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A \cap B) = 0,1 \quad P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,6 \quad P(A|B) = 0,5.$$

Calcúlense:

- (a) $P(B)$.
- (b) $P(A \cup B)$.
- (c) $P(A)$.
- (b) $P(\bar{B}|\bar{A})$.

Nota: \bar{S} denota el suceso complementario del suceso S . $P(S|T)$ denota la probabilidad del suceso S condicionada al suceso T .

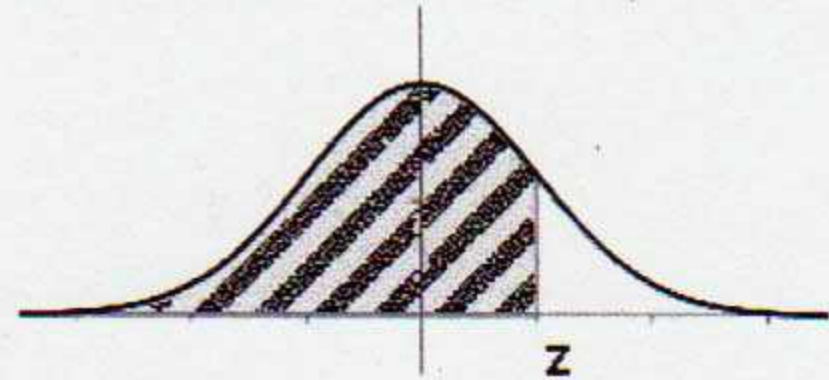
Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se supone que el gasto que hacen los individuos de una determinada población en regalos de Navidad se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 45 euros.

- (a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene el intervalo de confianza (251,6; 271,2) para μ , con un nivel de confianza del 95%. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.
- (b) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 64 para estimar μ . Calcúlese el error máximo cometido por esa estimación con un nivel de confianza del 90%.

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de z .



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9561	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9901	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO

MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

ESQUEMA DE LA SOLUCIÓN

OPCIÓN A

Ejercicio A1

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -7 & 4a-1 \\ 1 & 1+a & -(a+6) & 3a+1 \\ 0 & a & -6 & 3a-2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -7 & 4a-1 \\ 0 & 1 & 1-a & 2-a \\ 0 & 0 & (a+2)(a-3) & (a+2)(a-1) \end{array} \right)$$

1. $a \neq -2, 3$. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO.
2. $a = 3$. El sistema es INCOMPATIBLE.
3. $a = -2$. SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO.

b) Para $a = -2$ el sistema que debemos resolver es:

$$\begin{cases} x - 2y - 7z = -9 \\ y + 3z = 4 \end{cases} \rightarrow x = \lambda - 1, \quad y = 4 - 3\lambda, \quad z = \lambda \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

c) Para $a = -3$ el sistema que debemos resolver es:

$$\begin{cases} x - 3y - 7z = -13 \\ x - 2y - 3z = -8 \\ -3y - 6z = -11 \end{cases} \rightarrow x = -\frac{4}{3}, \quad y = \frac{7}{3}, \quad z = \frac{2}{3}.$$

Ejercicio A2

Sea x el número de cepas que se deben añadir. La producción será $P(x) = (1200 + x) \cdot (16 - 0,01x)$

$$P'(x) = 16 - 0,01x - 0,01 \cdot (1200 + x) = 4 - 0,02x$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow 4 - 0,02x = 0 \Rightarrow x = 200.$$

Deben añadirse 200 cepas.

Ejercicio A3

Consideremos los sucesos:

A: "El alumno es del colegio A"

B: "El alumno es del colegio B"

C: "El alumno es del colegio C"

S: "El alumno ha superado la prueba"

$$P(A) = 0,4 \quad P(S|A) = 0,8 \quad P(B) = 0,35 \quad P(S|B) = 0,9 \quad P(C) = 0,25 \quad P(S|C) = 0,82$$

$$a) P(S) = P(A)P(S|A) + P(B)P(S|B) + P(C)P(S|C) = 0,84.$$

$$b) P(B|\bar{S}) = \frac{P(\bar{S}|B)P(B)}{P(\bar{S})}; \quad P(\bar{S}|B) = 0,1; \quad P(\bar{S}) = 0,16; \quad P(B|\bar{S}) = \frac{0,35 \cdot 0,1}{0,16} = 0,21875.$$

Ejercicio A4

a) $\bar{x} = 29$; $z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645 \cdot \frac{2,8}{\sqrt{8}} = 1,63$.

El intervalo de confianza es $(29 - 1,63 ; 29 + 1,63) = (27,37 ; 30,63)$

b) $z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq E \implies 2,17 \cdot \frac{2,8}{\sqrt{n}} \leq 0,9 \implies \sqrt{n} \geq 6,75 \implies n \geq 45,56$

El mínimo tamaño muestral es de 46 alumnos.

OPCIÓN B

Ejercicio B1

Sean:

x : número de socios del equipo A.

y : número de socios del equipo B.

z : número de espectadores que no son socios ni del equipo A ni del equipo B.

$$\begin{cases} x + y + z = 72000 \\ \frac{x+y}{z} = \frac{13}{3} \\ x + 6500 = y \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 72000 \\ 3x + 3y - 13z = 0 \\ x - y = -6500 \end{cases} \implies x = 26000 \quad y = 32500 \quad z = 13500.$$

Hay 26000 socios del equipo A y 32500 del equipo B.

Ejercicio B2

a) En $\mathbb{R} - \{1\}$ la función es continua y derivable.

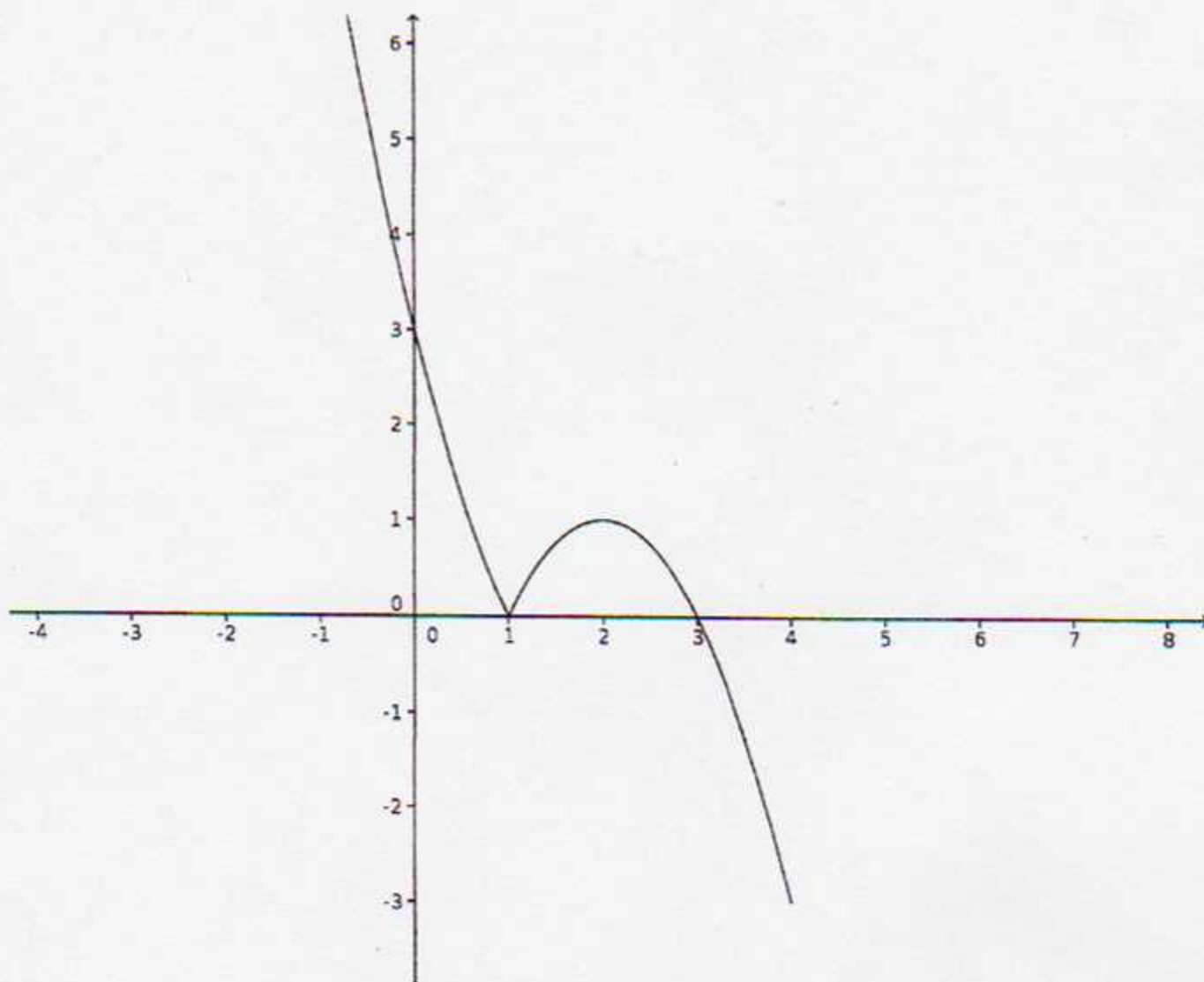
$f(1^-) = 0$; $f(1^+) = 0$. Como estos valores coinciden f es continua en $x = 1$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si } x < 1 \\ -2x + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$f'(1^-) = 2$; $f'(1^+) = -2 \implies f'(1^-) \neq f'(1^+) \implies f$ no es derivable en $x = 1$.

Por tanto, f es continua en \mathbb{R} y derivable en $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

b)



c)

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3) dx + \int_1^2 (-x^2 + 4x - 3) dx$$

$$\int_0^1 (x^2 - 4x + 3) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

$$\int_1^2 (-x^2 + 4x - 3) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x \right]_1^2 = \frac{2}{3}$$

Así, el valor del área es 2.

Ejercicio B3

a) $P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A|B)} = \frac{0,1}{0,5} = 0,2.$

b) $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0,6 = 0,4.$

c) $P(A) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(B) = 0,4 + 0,1 - 0,2 = 0,3.$

d) $P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{A})} = \frac{0,6}{0,7} = 0,86.$

Ejercicio B4

a) Las incógnitas son la media \bar{x} y el tamaño n de la muestra.

$$\bar{x} = \frac{251,6 + 271,2}{2} = 261,4$$

$$z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \bar{x} - 251,6 \implies 1,96 \cdot \frac{45}{\sqrt{n}} = 9,8 \implies \sqrt{n} = 9 \implies n = 81.$$

El tamaño de la muestra es 81.

b) $z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645 \cdot \frac{45}{\sqrt{64}} = 9,25.$

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

ATENCIÓN: La calificación debe hacerse en múltiplos de 0,25 puntos

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos).

Apartado (a)	Obtención de los valores críticos	0,75 puntos
	Discusión del sistema para cada caso (3x0,25).....	0,75 puntos
	Total apartado (a).....	1,50 puntos
Apartado (b)	Planteamiento del sistema de 2 ecuaciones.....	0,25 puntos
	Resolución del sistema.....	0,50 puntos
	Total apartado (b).....	0,75 puntos
Apartado (c)	Planteamiento del sistema de ecuaciones.....	0,25 puntos
	Resolución del sistema.....	0,50 puntos
	Total apartado (c).....	0,75 puntos

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos).

	Expresión correcta de la función que se debe optimizar.....	1,50 puntos
	Obtención del nº de cepas que optimizan el problema.....	1,50 puntos

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos).

Apartado (a)	Planteamiento correcto.....	0,50 puntos
	Cálculo correcto de la probabilidad pedida.....	0,50 puntos
	Total apartado (a).....	1,00 punto
Apartado (b)	Planteamiento correcto.....	0,50 puntos
	Cálculo correcto de la probabilidad pedida.....	0,50 puntos
	Total apartado (b).....	1,00 punto

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos).

Apartado (a)	Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$	0,25 puntos
	Expresión correcta de la fórmula del intervalo de confianza.....	0,25 puntos
	Obtención correcta del intervalo de confianza.....	0,50 puntos
	Total apartado (a).....	1,00 punto
Apartado (b)	Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$	0,25 puntos
	Planteamiento correcto.....	0,25 puntos
	Cálculo correcto del tamaño muestral.....	0,50 puntos
	Total apartado (b).....	1,00 punto

NOTA: La resolución de ejercicios por cualquier otro procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores, ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos).

Definición correcta y adecuada de las incógnitas.....	0,50 puntos
Planteamiento correcto del sistema de ecuaciones.....	1,50 puntos
Resolución correcta del problema.....	1,00 punto

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos).

Apartado (a) Estudio correcto de la continuidad.....	0,50 puntos
Estudio correcto de la derivabilidad.....	0,50 puntos
Total apartado (a).....	1,00 punto
Apartado (b) Representación del trozo correspondiente al dominio $(-\infty, 1]$	0,50 puntos
Representación del trozo correspondiente al dominio $(1, +\infty)$	0,50 puntos
Total apartado (b).....	1,00 punto
Apartado (c) Planteamiento correcto de la integral definida.....	0,50 puntos
Obtención del área.....	0,50 puntos
Total apartado (c).....	1,00 punto

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos).

Apartado (a) Planteamiento correcto.....	0,25 puntos
Cálculo correcto de la probabilidad pedida.....	0,25 puntos
Total apartado (a).....	0,50 puntos
Apartado (b) Planteamiento correcto.....	0,25 puntos
Cálculo correcto de la probabilidad pedida.....	0,25 puntos
Total apartado (b).....	0,50 puntos
Apartado (c) Planteamiento correcto.....	0,25 puntos
Cálculo correcto de la probabilidad pedida.....	0,25 puntos
Total apartado (c).....	0,50 puntos
Apartado (d) Planteamiento correcto.....	0,25 puntos
Cálculo correcto de la probabilidad pedida.....	0,25 puntos
Total apartado (d).....	0,50 puntos

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos).

Apartado (a) Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$	0,25 puntos
Cálculo correcto de la media.....	0,25 puntos
Cálculo correcto del tamaño de la muestra.....	0,50 puntos
Total apartado (a).....	1,00 punto
Apartado (b) Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$	0,25 puntos
Expresión correcta de la fórmula.....	0,25 puntos
Obtención correcta de la diferencia entre μ y la media muestral.....	0,50 puntos
Total apartado (b).....	1,00 punto

NOTA: La resolución de ejercicios por cualquier otro procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores, ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados