UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO

Curso **2013-2014**

MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

2

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.
CALIFICACIÓN: Cada pregunta se valorará sobre 2 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcúlese $(A^tB)^{-1}$, donde A^t denota a la traspuesta de la matriz A.

b) Resuélvase la ecuación matricial $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se consideran la función $f(x,y) = 5x - 2y$ y la región del plano S definida por el siguiente conjunto de restricciones:

$$x - 2y \leq 0, \qquad x + y \leq 6, \qquad x \geq 0, \qquad y \leq 3.$$

a) Represéntese la región S.

b) Calcúlense las coordenadas de los vértices de la región S y obténganse los valores máximo y mínimo de la función f en S indicando los puntos donde se alcanzan.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \begin{cases} x + a & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ x + b & \text{si } x > 3. \end{cases}$

a) Determínense a y b para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Calcúlese $\int_1^3 f(x)\,dx$.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral tales que: $P(A) = 0{,}4;\ P(A \cup B) = 0{,}5;\ P(B|A) = 0{,}5$.
Calcúlense:

a) $P(B)$

b) $P(A|\overline{B})$.

Nota: $\overline{S}$ *denota al suceso complementario del suceso* S.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

La longitud, en milímetros (mm), de los individuos de una determinada colonia de gusanos de seda se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica igual a 3 mm.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 48 gusanos de seda y se obtiene una media muestral igual a 36 mm. Determínese un intervalo de confianza para la media poblacional de la longitud de los gusanos de seda con un nivel de confianza del 95 % .

b) Determínese el tamaño muestral mínimo necesario para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor o igual que 1 mm con un nivel de confianza del 90 % .

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{llll} x & +y & +az & =2 \\ 3x & +4y & +2z & =a \\ 2x & +3y & -z & =1 \end{array}\right\}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de a.

b) Resuélvase el sistema en el caso $a = -1$.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Dada la función real de variable real $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x$.

a) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

b) Calcúlese $\int_2^3 f(x)\,dx$.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^2}{x-2}$$

a) Determínense sus asíntotas.

b) Determínense el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se dispone de un dado cúbico equilibrado y dos urnas A y B. La urna A contiene 3 bolas rojas y 2 negras; la urna B contiene 2 rojas y 3 negras. Lanzamos el dado: si el número obtenido es 1 ó 2 extraemos una bola de la urna A; en caso contrario extraemos una bola de la urna B.

a) ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola roja?

b) Si la bola extraída es roja, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la urna A?

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)

El consumo mensual de leche (en litros) de los alumnos de un determinado colegio se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 3$ litros .

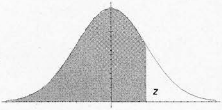
a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene el intervalo de confianza (16,33 ; 19,27) para estimar μ, con un nivel de confianza del 95 % . Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

b) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 64. Calcúlese el error máximo cometido en la estimación de μ mediante la media muestral con un nivel de confianza del 95 %.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de *z*.



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES
OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

Apartado a)

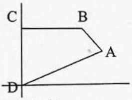
$$A^t=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}\ ;\ A^t\cdot B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 5 & 1\end{pmatrix}\ ;\ (A^t\cdot B)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Apartado b)

$$\text{Sea } X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix};\ A\cdot X=\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 5\end{pmatrix}\to\left.\begin{matrix}2x+y=0\\ -x=-1\\ x-2y=5\end{matrix}\right\}\to x=1\ ;\ y=-2\to X=\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2.

Apartado a)



Apartado b)

Vértices: A(4,2) ; B(3,3) ; C(0,3) ; D(0,0)

$f_A=16$; $f_B=9$; $f_C=-6$; $f_D=0$

El máximo se alcanza en A(4,2); el mínimo se alcanza en (0,3)

EJERCICIO 3.

Apartado a)

$$f(1^-)=1+a\ ;\ f(1^+)=-1\to f(1^-)=f(1^+)\to 1+a=-1\to a=-2$$

$$f(3^-)=7\ ;\ f(3^+)=3+b\to f(3^-)=f(3^+)\to 7=3+b\to b=4$$

Luego $a=-2$ y $b=4$.

Apartado b)

$$\int(x^2-2)\cdot dx=\frac{x^3}{3}-2x+C \qquad \int_1^3 f(x)\cdot dx=\left[\frac{x^3}{3}-2x\right]_1^3=3-(-\frac{5}{3})=\frac{14}{3}$$

EJERCICIO 4.

Apartado a)

$$p(B)=P(A\cup B)+p(A\cap B)-p(A);p(A\cap B)=p(B|A)\cdot p(A)=0{,}2\ ;\ p(B)=0{,}3$$

Apartado b)

$$p(A|\overline{B})=\frac{p(A\cap\overline{B})}{p(\overline{B})}=\frac{p(A)-p(A\cap B)}{1-p(B)}=\frac{0{,}4-0{,}2}{0{,}7}=\frac{2}{7}$$

EJERCICIO 5.

Apartado a)

$$\overline{x}=36\ ;\ z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1{,}96\cdot\frac{3}{\sqrt{48}}\approx 0{,}85\ .$$

El intervalo de confianza es $(36-0{,}85\ ;\ 36+0{,}85)=(35{,}15\ ;\ 36{,}85)$

Apartado b)

$z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le E\to 1{,}645\cdot\frac{3}{\sqrt{n}}\le 1\to\sqrt{n}\ge 4{,}935\to n\ge 24{,}35$. A partir de 25 gusanos de seda.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.

Apartado a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 2 \\ 3 & 4 & 2 & a \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 2-3a & a-6 \\ 0 & 0 & a-3 & 3-a \end{array}\right)$$

Para $a=3$ el sistema es compatible indeterminado

Para $a \neq 3$ el sistema es compatible determinado.

Apartado b)

$x=3\ ;\ y=-2\ ;\ z=-1$

EJERCICIO 2.

Apartado a)

$f(x)=4x^3-3x^2-2x\ ;\ f(1)=-1;\ f'(x)=12x^2-6x-2\ ;\ f'(1)=4$

$y+1=f'(1)\cdot(x-1) \to y+1=4(x-1) \to y=4x-5$

Apartado b)

$\int(4x^3-3x^2-2x)\cdot dx = x^4-x^3-x^2+C \quad ;\ \int_2^3 f(x)\cdot dx = \left[x^4-x^3-x^2\right]_2^3 = 45-4=41.$

EJERCICIO 3.

Apartado a)

Asíntota vertical: $x=2$

Asíntota horizontal: no existe

Asíntota oblicua: $y=ax+b\ ;\ a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2-2x}=1$;

$b=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x-2}=2$. (Análogo si $x \to -\infty$) La asíntota oblicua es $y=x+2$

Apartado b)

$D=R-\{2\}=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$. $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$; $f'(x)=\dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2}$; $f'(x)=0 \to x_1=0;\ x_2=4$

$f'(x)>0$ en $(-\infty,0)\cup(4,+\infty) \to$ f es creciente en $(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$

$f'(x)<0$ en $(0,2)\cup(2,4) \to$ f es decreciente en $(0,2)\cup(2,4)$

EJERCICIO 4.

Consideramos los sucesos: A: "Obtener 1 ó 2" ; B: "Extraer una bola roja"

$P(A)=\dfrac{1}{3}$; $P(B|A)=\dfrac{3}{5}$; $P(\overline{A})=\dfrac{2}{3}$; $P(B|\overline{A})=\dfrac{2}{5}$

Apartado a)

$P(B)=P(A)\cdot P(B|A)+P(\overline{A})\cdot P(B|\overline{A})=\dfrac{7}{15}$

Apartado b)

$P(A|B)=\dfrac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(B)}=\dfrac{3}{7}$

EJERCICIO 5.

Apartado a)

$\overline{x}=\dfrac{16{,}33+19{,}27}{2}=17{,}8 \qquad z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\overline{x}-16{,}33 \to 1{,}96\cdot\dfrac{3}{\sqrt{n}}=1{,}47 \to \sqrt{n}=4 \to n=16$

La media muestral es 17,8 y el tamaño de la muestra es 16.

Apartado b)

$z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=1{,}96\cdot\dfrac{3}{\sqrt{64}}=0{,}735$

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II. PAU 2014
CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

ATENCIÓN: La calificación debe hacerse en múltiplos de 0,25 puntos

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Obtención correcta de la matriz ....0,25 puntos.
Obtención correcta del producto ....0,25 puntos.
Obtención correcta de la matriz inversa de A^tB....................0,50 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Planteamiento correcto del sistema de ecuaciones....................0,50 puntos.
Obtención correcta de la matriz X....................0,50 puntos.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Dibujo correcto de S....................1,00 punto.
Apartado (b): 1 punto
Cálculo correcto de las coordenadas de los vértices....................0,50 puntos.
Obtención de los valores....................0,50 puntos.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Planteamiento de la condición de continuidad en $x = 1$....................0,25 puntos.
Planteamiento de la condición de continuidad en $x = 3$....................0,25 puntos.
Obtención de los valores a y b....................0,50 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Cálculo correcto de una primitiva....................0,50 puntos.
Cálculo correcto de la integral definida....................0,50 puntos.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Planteamiento correcto....................0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad pedida....................0,50 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Planteamiento correcto....................0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad pedida....................0,50 puntos.

Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Cálculo correcto de $z_{a/2}$....................0,25 puntos.
Expresión correcta de la fórmula del intervalo de confianza....................0,25 puntos.
Obtención correcta del intervalo de confianza....................0,50 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Planteamiento correcto....................0,50 puntos.
Cálculo correcto del tamaño muestral....................0,50 puntos.

NOTA: La resolución de ejercicios por cualquier otro procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores, ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados.

OPCIÓN B

ATENCIÓN: La calificación debe hacerse en múltiplos de 0,25 puntos

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Obtención de los valores críticos..0,50 puntos.
Discusión del sistema para cada caso (2x0,25).......................................0,50 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Resolución correcta del sistema...1,00 punto.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Fórmula correcta de la expresión de la tangente......................................0,25 puntos.
Cálculo correcto de la primera derivada...0,25 puntos.
Obtención correcta de la tangente...0,50 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Cálculo correcto de una primitiva...0,50 puntos.
Cálculo correcto de la integral definida..0,50 puntos.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Obtención correcta de la asíntota vertical...0,50 puntos.
Obtención correcta de la asíntota oblicua...0,50 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Obtención del dominio..0,25 puntos.
Cálculo correcto de la primera derivada...0,25 puntos.
Estudio correcto del crecimiento y decrecimiento de f............................0,50 puntos.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Planteamiento correcto...0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad pedida...0,50 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Planteamiento correcto...0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad pedida...0,50 puntos.

Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a): 1 punto.
Cálculo correcto de la media...0,50 puntos.
Cálculo correcto del tamaño de la muestra...0,50 puntos.
Apartado (b): 1 punto.
Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$ ....0,25 puntos.
Expresión correcta de la fórmula...0,25 puntos.
Obtención correcta del error..0,50 puntos.

NOTA: La resolución de ejercicios por cualquier otro procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores, ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados.